Н. М. ГЮНТЕР и Р. О. КУЗЬМИН

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

ТОМ II

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
С. И. АМОСОВА и Г. Ю. ДЖАНЕЛИДЗЕ

ИЗДАНИЕ ТРИНАДЦАТОЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ

*Допущено Министерством высшего образования СССР
в качестве учебного пособия
для высших технических учебных заведений*

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1958

ОГЛАВЛЕНИЕ

Отдел VII

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

Отдел VIII

ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Отдел IX

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ИНТЕГРАЛЫ ПО ЛИНИЯМ И ПОВЕРХНОСТЯМ

Отдел X

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Отдел XI

ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Отдел XII

ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРИНАДЦАТОМУ ИЗДАНИЮ

В основе предлагаемой второй части задачника также лежит сборник задач по высшей математике, составленный в 1912 г. сотрудниками кафедры математики Института инженеров путей сообщения, во главе которой стоял Н. М. Гюнтер. В некоторых дальнейших изданиях того же задачника принимали участие работники физико-математического факультета Ленинградского университета. В последующих изданиях, выходивших под редакцией Н. М. Гюнтера и Р. О. Кузьмина, принимали участие и некоторые сотрудники кафедры высшей математики Ленинградского политехнического института имени М. И. Калинина.

При подготовке настоящего издания были тщательно проверены решения задач и введен ряд новых примеров, в частности, дополнены разделы — интегрирование функций и дифференциальные уравнения. Эта работа произведена С. И. Амосовым и Н. А. Никольской.

С. И. Амосов и *Г. Ю. Джанелидзе*

10 ноября 1957 г.
Ленинград

ПРЕДИСЛОВИЕ К ДВЕНАДЦАТОМУ ИЗДАНИЮ

В настоящем издании существенных изменений не имеется. При подготовке к печати большая часть задач была решена заново, с целью проверки и выявления промахов и опечаток. В этой большой работе приняли участие следующие сотрудники кафедры математики Ленинградского Политехнического института им. М. И. Калинина: С. И. Амосов, М. И. Болгов, Г. Н. Бровкович, Д. Л. Гавра, А. Б. Гур-Мильнер, М. М. Добулевич, А. Б. Кордашенко, С. А. Красовский, Т. И. Лаппо, Н. А. Никольская, С. Н. Нумеров, И. С. Сребрянский, П. А. Соболев.

Всем им я выражаю глубокую благодарность.

Р. О. Кузьмин

январь 1949 г.
Ленинград

ОТДЕЛ СЕДЬМОЙ

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

§ 1. Основные формулы и приемы интегрирования

При нахождении неопределенных интегралов важную роль играет таблица основных формул. Ее удобно помнить в таком виде:

1. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C; \quad n \neq -1.$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

3. $\int e^x\,dx = e^x + C.$

4. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$

5. $\int \cos x\,dx = \sin x + C.$

6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C; \quad a > 0.$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C.$

10. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$

11. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$

12. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$

Следующие четыре равенства дают основные правила интегрирования:

I. $\int (u + v + w)\,dx = \int u\,dx + \int v\,dx + \int w\,dx.$

II. $\int cu\,dx = c\int u\,dx.$

III. $\int u\,dv = uv - \int v\,du.$

IV. $\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt; \quad x = \varphi(t).$

Применяя формулы 1 и 2 и правила I и II, найти интегралы:

1. $\int x^3\,dx.$

2. $\int \sqrt{x}\,dx.$

3. $\int x\sqrt{x}\,dx.$

4. $\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,dx.$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}.$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}.$

7. $\int \frac{dx}{x^3}.$

8. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x}}.$

9. $\int (x^2 + 6x - 5)\,dx.$

10. $\int (x^4 - 3x^2 + 5x)\,dx.$

11. $\int x^2(x^2 - 1)\,dx.$

12. $\int (x^2 - 1)^2\,dx.$

13. $\int \frac{x^2 - 3x + 4}{x}\,dx.$

14. $\int \frac{x^3 + 2x^2 - x + 3}{x}\,dx.$

15. $\int \frac{x^2 - x + 1}{\sqrt{x}}\,dx.$

16. $\int \frac{(x+1)^2\,dx}{\sqrt{x}}.$

Следующие интегралы находятся непосредственно применением формул 1—12, а также замены переменных по формуле $ax + b = t$.

17. $\int e^{-x}\,dx.$

18. $\int e^{-3x}\,dx.$

19. $\int \sin 2x\,dx.$

20. $\int \cos(3x - 5)\,dx.$

21. $\int \frac{dx}{x-2}.$

22. $\int \frac{dx}{3x+2}.$

23. $\int \frac{x^2 - x + 1}{x - 2}\,dx.$

24. $\int \frac{dx}{x^2+2}.$

25. $\int \frac{dx}{x^2-3}.$

26. $\int \frac{dx}{2x^2+7}.$

27. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}.$

28. $\int \frac{x^4\,dx}{x-1}.$

29. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6}}.$

30. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+7}}.$

31. $\int \frac{dx}{(x-2)^3}.$

32. $\int \frac{x\,dx}{(2x-1)^2}.$

33. $\int \frac{dx}{\cos^2 3x}.$

34. $\int \frac{dx}{1+\cos x}.$

35. $\int \frac{dx}{\sin^2(5x-2)}.$

36. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x}}.$

37. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}.$

38. $\int \frac{dx}{\cos x}.$

39. $\int 2^x\,dx.$

40. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1} - \sqrt{x-2}}$, переведя иррациональность в числитель.

41. $\int \frac{dx}{(x+2)^2+3}$. **42.** $\int \frac{dx}{x^2+6x+13}$. **43.** $\int \frac{dx}{x^2+5x+6}$.

44. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$. **45.** $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}}$. **46.** $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+3x}}$.

47. $\int \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}}$.

В ряде случаев бывает удобно преобразовать произведения и степени синусов и косинусов в суммы или разности. При этом можно пользоваться формулами:

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a-b)+\cos(a+b)]; \qquad \cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2};$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b)-\cos(a+b)]; \qquad \sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2};$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a-b)+\sin(a+b)]; \qquad \sin a \cos a = \frac{1}{2}\sin 2a.$$

Иногда еще удобнее применять формулы Эйлера:

$$\cos x = \frac{e^{xi}+e^{-xi}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{xi}-e^{-xi}}{2i}.$$

Найти интегралы:

48. $\int \cos x \cos 3x\, dx$. **49.** $\int \cos x \sin 3x\, dx$.

50. $\int \cos 3x \cos 4x\, dx$. **51.** $\int \cos x \cos 3x \cos 5x\, dx$.

52. $\int \sin x \sin 2x \sin 3x\, dx$. **53.** $\int \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{12}\, dx$.

54. $\int \sin^2 x \cos^2 3x\, dx$. **55.** $\int \sin^4 x\, dx$.

56. $\int \cos^4 x\, dx$. **57.** $\int \sin^4 x \cos^4 x\, dx$.

Следующие интегралы находятся простыми подстановками:

58. $\int \frac{e^x\, dx}{\sqrt{e^x+1}}$. **59.** $\int \frac{e^x\, dx}{e^{2x}+1}$. **60.** $\int \frac{\ln x}{x}\, dx$.

61. $\int \frac{dx}{x \ln x}$. **62.** $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\, dx$. **63.** $\int \sin^3 x \cos x\, dx$.

64. $\int \cos^2 x \sin x\, dx$. **65.** $\int e^{x^2} x\, dx$. **66.** $\int \frac{x\, dx}{(x^2+1)^2}$.

67. $\int \frac{x\, dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$. **68.** $\int \sqrt{x^3+1}\, x^2\, dx$.

69. $\int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}$. **70.** $\int \frac{dx}{\arcsin x \sqrt{1-x^2}}$. **71.** $\int \frac{\sin x\, dx}{\sqrt{2+\cos x}}$.

72. $\int \frac{\sin 2x\, dx}{\sin^2 x + 3}$. **73.** $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}\, dx}{\cos^2 x}$. **74.** $\int \frac{\cos^3 x\, dx}{\sin^4 x}$.

75. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 5\cos^2 x}$. **76.** $\int \operatorname{tg} x\, dx$.

77. $\int \operatorname{tg}^2 x\, dx$. **78.** $\int \frac{2x+11}{x^2+6x+13}\, dx$.

79. $\int \frac{x\, dx}{x^2+x+1}$. **80.** $\int \frac{4x+8}{3x^2+2x+5}\, dx$.

81. $\int \frac{5x+7}{\sqrt{5-4x-x^2}}\, dx$. **82.** $\int \frac{3x+2}{\sqrt{3+x+x^2}}\, dx$.

83. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{x^2-ax}}$. **84.** $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{x^2+x-1}}$.

85. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{1+x-x^2}}$. **86.** $\int \frac{(x+a)\, dx}{\sqrt{ax-x^2}}$.

С помощью одной из тригонометрических подстановок $x = a \sin \varphi$, $x = a \operatorname{tg} \varphi$, $x = a \sin^2 \varphi$ найти интегралы:

87. $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)\sqrt{a^2+x^2}}$. **88.** $\int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

89. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(a-x)}}$. **90.** $\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

91. Найти интеграл $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\, dx$, переведя иррациональность в знаменатель.

Применяя интегрирование по частям, выражаемое равенством III, найти следующие интегралы:

92. $\int x^2 \ln x\, dx$. **93.** $\int x \cos x\, dx$. **94.** $\int x \operatorname{ch} x\, dx$.

95. $\int x \sin x\, dx$. **96.** $\int x \operatorname{arctg} x\, dx$. **97.** $\int (x^2+x) \ln (x+1)\, dx$.

98. $\int x^2 e^{-x}\, dx$. **99.** $\int x^2 \sin x\, dx$. **100.** $\int x \ln (x^2-1)\, dx$.

101. $\int \ln x\, dx$. **102.** $\int x \ln^2 x\, dx$.

§ 2. Интегрирование рациональных функций

103. Найти интеграл $\int \frac{x\, dx}{x^2-3x+2}$, пользуясь тождеством

$$\frac{x}{x^2-3x+2} = \frac{-1}{x-1} + \frac{2}{x-2}.$$

104. Найти интеграл $\int \frac{2x+3}{x^2-5x+6}\,dx$, пользуясь тождеством

$$\frac{2x+3}{x^2-5x+6}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3},$$

в котором коэффициенты A и B легко находятся приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях x после освобождения от знаменателя.

Найти интегралы:

105. $\int \frac{dx}{x^4-1}$.

106. $\int \frac{x\,dx}{x^3-1}$.

107. $\int \frac{2x^2+4}{x^3-x^2+x-1}\,dx$.

108. $\int \frac{dx}{x^2(x-1)}$.

109. $\int \frac{dx}{(x+a)(x^2+b^2)}$.

110. $\int \frac{x^2-x+2}{x^4-5x^2+4}\,dx$.

111. $\int \frac{x^2\,dx}{(x-1)(x-2)(x-3)}$.

112. $\int \frac{x\,dx}{x^3-6x^2+11x-6}$.

113. $\int \frac{dx}{x^3+1}$.

114. $\int \frac{x^5+1}{x^6+x^4}\,dx$.

115. $\int \frac{x^3+x^2+2}{x(x^2-1)^2}\,dx$.

116. $\int \frac{x^3-2x^2+4}{x^3(x-2)^2}\,dx$.

117. $\int \frac{x^2\,dx}{x^4-1}$.

118. $\int \frac{x\,dx}{x^3+1}$.

119. $\int \frac{9x^2-14x+1}{x^3-2x^2-x+2}\,dx$.

120. $\int \frac{dx}{(x^2+9)^2}$.

121. $\int \frac{dx}{x^3+2x-3}$.

В следующих интегралах для разложения знаменателя на множители удобно прибавить и вычесть слагаемое ax^2, где a — соответственно подобранный коэффициент.

122. $\int \frac{dx}{x^4+1}$.

123. $\int \frac{x^2\,dx}{x^4+x^2+1}$.

124. $\int \frac{(x^2+2)\,dx}{x^4+x^2+4}$.

125. $\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$.

Если знаменатели разлагаются на простые множители первой степени, то при разложении дроби на простейшие удобна формула:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi(a_k)}{\psi'(a_k)}\,\frac{1}{x-a_k},$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — корни полинома $\psi(x)$. Если среди корней есть пара комплексных сопряженных, то в сумме, стоящей в правой части, два соответствующих слагаемых можно заменить одной величиной:

$$\frac{\left[\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}+\frac{\varphi(\bar{a})}{\psi'(\bar{a})}\right]x-\left[\bar{a}\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}+a\frac{\varphi(\bar{a})}{\psi'(\bar{a})}\right]}{x^2-(a+\bar{a})x+a\bar{a}}.$$

Здесь $\bar{a}=\alpha-\beta i$ — число комплексное сопряженное с $a=\alpha+\beta i$.

Найти интегралы:

126. $\int \frac{6\,dx}{x(x-1)(x-2)(x-3)}$.

127. $\int \frac{24\,dx}{x(x^2-1)(x^2-4)}$. **128.** $\int \frac{dx}{x^{2n}+1}$.

Следующие интегралы сводятся к интегралам предыдущих типов после выделения целой части в подынтегральной дроби.

129. $\int \frac{x^4\,dx}{x^2+3}$, **130.** $\int \frac{x^6\,dx}{x^2-1}$. **131.** $\int \frac{x^3\,dx}{x^2+x+1}$.

132. $\int \frac{x^3\,dx}{x^2-3x+2}$. **133.** $\int \frac{x^6+16}{x^4-4}\,dx$.

134. $\int \frac{x^4\,dx}{x^3-6x^2+11x-6}$. **135.** $\int \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\,dx$.

136. $\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}\,dx$. **137.** $\int \frac{x^6\,dx}{(x^2-1)^2}$.

Пользуясь тождеством: $4a(ax^2+bx+c)-(2ax+b)^2=4ac-b^2$ и интегрируя по частям интеграл $\int \frac{(2ax+b)^2\,dx}{(ax^2+bx+c)^n}$, можно доказать формулу приведения:

$$(4ac-b^2)\,u_n=\frac{2n-3}{n-1}\cdot 2au_{n-1}+\frac{1}{n-1}\cdot\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^{n-1}},$$

где

$$u_n=\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}.$$

Следующие интегралы найти с помощью формулы приведения:

138. $\int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$. **139.** $\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^3}$.

140. $\int \frac{dx}{(x^2+4)^4}$. **141.** $\int \frac{dx}{(x^2-3x+3)^2}$.

142. Доказать равенство:

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}=\frac{1}{2n-2}\,\frac{x}{a^2(x^2+a^2)^{n-1}}+$$
$$+\frac{2n-3}{(2n-2)(2n-4)}\,\frac{x}{a^4(x^2+a^2)^{n-2}}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{(2n-3)(2n-5)\ldots 3\cdot 1}{(2n-2)(2n-4)\ldots 4\cdot 2}\,\frac{1}{a^{2n-1}}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C.$$

143. Доказать равенство:

$$\int \frac{(2ax+b)^m}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx = -\frac{(2ax+b)^{m-1}}{(n-1)(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \frac{2a(m-1)}{n-1}\int \frac{(2ax+b)^{m-2}}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}\,dx.$$

Найти интегралы:

144. $\int \frac{x^4\,dx}{(x^2+3)^3}$.
145. $\int \frac{x^6\,dx}{(x^2-5)^4}$.

146. $\int \frac{x^6\,dx}{(x^2+4)^4}$.
147. $\int \frac{x^4\,dx}{(x^2-3)^3}$.

В следующих интегралах подынтегральная функция имеет вид $x^m(ax^n+b)^{-p}$. В них полезна подстановка: $x^\sigma = t$, где σ — наибольший общий делитель чисел $m+1$ и n.

148. $\int \frac{x^5\,dx}{x^4+1}$.
149. $\int \frac{x^3\,dx}{(x^8+4)^2}$.
150. $\int \frac{x^3\,dx}{x^8+1}$.

151. $\int \frac{x^5\,dx}{(x^{12}+1)^2}$.
152. $\int \frac{dx}{x(x^3+4)}$.
153. $\int \frac{x^5\,dx}{(x^2+2)^2}$.

154. $\int \frac{x^3+1}{x(x^3-8)}\,dx$.
155. $\int \frac{x^8-1}{x(x^8+1)}\,dx$.
156. $\int \frac{dx}{x(x^6+1)^2}$.

157. $\int \frac{x^5\,dx}{x^{12}-1}$.

В следующих задачах интеграл находится после того, как знаменатель разлагается на множители.

158. $\int \frac{x^3+4x^2+6x}{x^4+2x^3+3x^2+4x+2}\,dx$.

159. $\int \frac{2x^2+x+4}{x^4+x^3+2x^2-x+3}\,dx$.

160. $\int \frac{4x^3-x^2+10x+5}{x^4-x^3+4x^2+3x+5}\,dx$.

161. $\int \frac{4x^3-17x^2+28x-15}{x^4-7x^3+20x^2-27x+15}\,dx$.

Найти алгебраическую часть в интегралах:

162. $\int \frac{x^2+1}{x(x^3+1)^2}\,dx$.
163. $\int \frac{dx}{x^2(x^2+1)^2}$.

164. $\int \frac{2-3x+x^2}{(x+1)^2(x^2+x+1)^2}\,dx$.
165. $\int \frac{4x^5-1}{(x^5+x+1)^2}\,dx$.

Ряд дальнейших задач решается разными специальными приемами, позволяющими избежать разложения дроби на простейшие.

Дробно-линейная подстановка вида $\frac{x-a}{x-b}=t$ позволяет удобно найти интегралы:

166. $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x-2)^3}$. **167.** $\int \frac{dx}{(x^2-x)^3}$.

168. $\int \frac{dx}{(x^2-1)^4}$. **169.** $\int \frac{dx}{(x-1)^2(x^2-1)^3}$.

Подстановки видов $x+\frac{1}{x}=u$ и $x-\frac{1}{x}=v$ позволяют с легкостью найти следующие интегралы, содержащие возвратные полиномы и множитель x^2-1 или x^2+1:

170. $\int \frac{x^2-1}{x^4+3x^3+5x^2+3x+1}\,dx$. **171.** $\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\frac{dx}{x^2+x+1}$.

172. $\int \frac{x^2+1}{x^4+2x^3+3x^2-2x+1}\,dx$. **173.** $\int \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}\,dx$.

174. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$, воспользовавшись тождествами:

$$1=\frac{1}{2}(x^3+1)-\frac{1}{2}(x^3-1),\quad 1=\frac{1}{2}(x^2+1)-\frac{1}{2}(x^2-1).$$

175. Найти интеграл $\int \frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx$, вычтя и прибавив в числителе величину x^2.

176. Найти интеграл $A=\int \frac{dx}{x^4+1}$, введя вспомогательный интеграл $B=\int \frac{x^2\,dx}{x^4+1}$ и заметив, что интегралы $A+B$ и $A-B$ берутся с легкостью после подстановок $x-\frac{1}{x}=u$ и $x+\frac{1}{x}=v$.

177. Найти величину интеграла $A=\int \frac{dx}{x^6+1}$, введя в рассмотрение интеграл $B=\int \frac{x^4\,dx}{x^6+1}$.

178. Найти интегралы $C=\int \frac{x^2\,dx}{x^8+1}$ и $D=\int \frac{x^4\,dx}{x^8+1}$.

§ 3. Интегрирование иррациональных функций

Если в подынтегральной функции содержится корень какой-нибудь степени из дробно-линейной функции $\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$, то от этой иррациональности можно избавиться подстановкой: $\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}=t^n$, где n — соответственно выбранный показатель. С помощью этого приема находятся следующие интегралы:

179. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[3]{2x-1}}$.

180. $\int \frac{x\,dx}{(3x-1)\sqrt{3x-1}}$.

181. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x}$.

182. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}$.

183. $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{1+\sqrt{x}}\,dx$.

184. $\int \frac{2+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}+1}\,dx$.

Следующие четыре интеграла, хотя и иного типа, но тоже находятся подстановкой вида: $\frac{x-a}{x-b}=t^n$.

185. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^3(x-2)}}$.

186. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)}}$.

187. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$.

188. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^7(x+1)^2}}$.

Близкими приемами находятся и следующие три интеграла:

189. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$.

190. $\int \sqrt[3]{\frac{(x+1)^5}{(x-1)^2}}\,dx$.

191. $\int \frac{dx}{(\sqrt{x+2}+1)\sqrt{\sqrt{x+2}-1}}$.

Следующие интегралы имеют вид $\int x^m(ax^n+b)^p\,dx$, где m, n и p — рациональные числа. Они сводятся к интегралам от рациональных функций в трех случаях:

I. Если p — целое, хотя бы и отрицательное. Подстановка: $x=t^N$, где N — общий знаменатель дробей m и n.

II. Если $\frac{m+1}{n}$ — целое. Подстановка: $ax^n+b=t^M$, где M — знаменатель числа p.

III. Если $\frac{m+1}{n}+p$ — целое. Подстановка: $a+bx^{-n}=t^M$, где M — знаменатель числа p.

Замечание: Если ни одно из трех чисел p, $\frac{m+1}{n}$ и $\frac{m+1}{n}+p$ не является целым числом, то по теореме Чебышева интегралы данного вида не могут быть выражены конечной комбинацией элементарных функций.

Вычислить интегралы:

192. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x}+1)^2}$.
193. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}(\sqrt[3]{x}+1)^3}$.
194. $\int \frac{\sqrt[3]{x}\,dx}{\sqrt{\sqrt[3]{x}+1}}$.
195. $\int \frac{x^7\,dx}{\sqrt{x^2-1}}$.
196. $\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$.
197. $\int \frac{dx}{x^6\sqrt{x^2-1}}$.
198. $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}$.
199. $\int x^7\sqrt{1+x^2}\,dx$.
200. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$.
201. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.
202. $\int \sqrt[3]{x-x^3}\,dx$.
203. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^6-1}}$.

Следующие два интеграла решаются приемом, подобным применяемому в третьем случае интегралов предыдущего типа:

204. $\int \frac{dx}{(5x^3+3)\sqrt[3]{4x^3+3}}$.
205. $\int \frac{dx}{(x^4+1)\sqrt[4]{2x^4+1}}$.

Во многих случаях при нахождении интегралов от дифференциальных биномов, т. е. интегралов вида $u_{m,\,p}=\int x^m(ax^n+b)^p\,dx$, бывает полезно сначала свести интеграл к другому, у которого величины m и p имеют более удобные значения. Это можно сделать с помощью формул приведения. Главнейшие из них имеют такой вид:

$$a(m+np+1)\,u_{m,\,p}=x^{m-n+1}(ax^n+b)^{p+1}-b(m-n+1)\,u_{m-n,\,p},$$

$$(m+np+1)\,u_{m,\,p}=x^{m+1}(ax^n+b)^p+bnpu_{m,\,p-1}.$$

С помощью формул приведения найти интегралы:

206. $\int \frac{x^6\,dx}{\sqrt{x^2+1}}$.
207. $\int \frac{x^8\,dx}{\sqrt{x^2-1}}$.
208. $\int \frac{dx}{x^7\sqrt{x^4+1}}$.
209. $\int \frac{dx}{(x^2+1)^3\sqrt{x^2+1}}$.
210. $\int (x^2-1)^2\sqrt{x^2-1}\,dx$.
211. $\int \frac{x^9\,dx}{\sqrt[3]{x^3+1}}$.

В большом количестве дальнейших задач даны интегралы, содержащие корень квадратный из квадратного полинома. Все они могут быть сведены к интегралам от рациональных функций одной из трех подстановок Эйлера:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = x\sqrt{a}+t, \quad \sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{c}+tx,$$
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-x_1),$$

где x_1 — корень полинома ax^2+bx+c.

Однако в большинстве случаев подстановки Эйлера приводят к более длинным вычислениям, чем прямые методы. Для их применения следует ознакомиться с тремя основными типами изучаемых интегралов.

I. Интегралы вида $\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, где $f(x)$ — полином.

В большинстве случаев удобен метод неопределенных коэффициентов. При этом пишем предположительное тождество:

$$\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = (A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\ldots+A_n)\sqrt{ax^2+bx+c}+$$
$$+A_{n+1}\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Беря производную от обеих частей равенства, получаем: $\frac{f(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} =$

$$= [(n-1)A_1x^{n-2}+(n-2)A_2x^{n-3}+\ldots+A_{n-1}]\sqrt{ax^2+bx+c}+(A_1x^{n-1}+$$
$$+A_2x^{n-2}+\ldots+A_n)\frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}+\frac{A_{n+1}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Освобождаясь от знаменателя, получим в обеих частях равенства полиномы степени n. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим уравнения, из которых коэффициенты $A_1, A_2, \ldots, A_n$ находятся один за другим.

Найти интегралы:

212. $\int \frac{(x^2+1)\,dx}{\sqrt{-x^2+3x-2}}$.

213. $\int \frac{x^2+x+1}{\sqrt{-x^2+x+4}}\,dx$.

214. $\int \frac{x^3+2x^2+x-1}{\sqrt{x^2+2x-1}}\,dx$.

215. $\int \frac{x^3-x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx$.

216. $\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

217. $\int x^2\sqrt{x^2+2}\,dx$.

Предыдущие задачи содержали интегралы вида $\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, где $f(x)$ — полином. Чтобы иметь возможность интегрировать самый общий интеграл вида $\int f(x, y)\,dx$, где $f(x, y)$ — рациональная функция от x и y, а $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$, важно уметь находить интегралы еще двух видов, которые мы обозначим цифрами II и III.

II. Интегралы вида $\int \frac{f_m(x)\,dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}$, где $f_m(x)$ — полином степени m, меньшей, чем n. Эти интегралы сводятся к интегралам предыдущего класса подстановкой $x-a=\frac{1}{t}$. Если степени полинома $f_m(x)$ не меньше, чем n, то у дроби $\frac{f_m(x)}{(x-a)^n}$ следует выделить целую часть.

С помощью этих методов найти интегралы:

218. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

219. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$.

220. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{2x^2+2x+1}}$.

221. $\int \frac{dx}{(x-1)^2\sqrt{x^2-1}}$.

222. $\int \frac{x^3+x-1}{(x-1)\sqrt{x^2+2x-1}}\,dx$.

223. $\int \frac{x^3\,dx}{(x-1)^2\sqrt{x^2+2x+4}}$.

224. $\int \frac{\sqrt{x^2+2x+4}}{(x-1)^2}\,dx$.

225. $\int \frac{x\,dx}{(x-1)^2\sqrt{x^2+1}}$.

III. Третий и наиболее сложный тип представляют интегралы $I=$ $=\int \frac{(Mx+N)\,dx}{(x^2+px+q)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}$, где корни трехчлена x^2+px+q мнимые. Если $p=b=0$, то $I=M\int \frac{x\,dx}{(x^2+q)^n\sqrt{ax^2+c}}+N\int \frac{dx}{(x^2+q)^n\sqrt{ax^2+c}}=$ $=M\int \frac{x\,dx}{(x^2+q)^n\sqrt{ax^2+c}}+N\int \frac{x^{-2n-1}\,dx}{(1+qx^{-2})^n\sqrt{a+cx^{-2}}}$. Здесь первый интеграл находится подстановкой $ax^2+c=u^2$, а второй — подстановкой $a+cx^{-2}=v^2$. В общем случае интеграл I сводится к этому простейшему подстановкой $x=\frac{\alpha t+\beta}{t+1}$. При этом получается:

$$I=\int \frac{f_n(t)\,dt}{(At^2+Bt+C)^n\sqrt{A_1t^2+B_1t+C_1}},$$

где $f_n(t)$ — полином степени n, а коэффициенты B и B_1 имеют такие значения:

$$B=2\alpha\beta+p(\alpha+\beta)+2q;\quad B_1=2a\alpha\beta+b(\alpha+\beta)+2c.$$

Полагая $B=0$, $B_1=0$, получим уравнения, дающие для α и β вещественные значения при вещественных p, q, a, b, c, если хотя бы один из полиномов x^2+px+q, ax^2+bx+c имеет мнимые корни. При таком выборе чисел α и β интеграл I распадается на сумму интегралов двух видов:

$$\int \frac{t^{2\nu+1}\,dt}{(At^2+C)\sqrt{A_1t^2+C_1}} \quad \text{и} \quad \int \frac{t^{2\nu}\,dt}{(At^2+C)\sqrt{A_1t^2+C_1}},$$

которые интегрируются соответственно подстановками

$$A_1t^2+C_1=\sigma^2 \quad \text{и} \quad A_1+C_1t^{-2}=\tau^2.$$

Найти интегралы:

226. $\int \frac{dx}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$.

227. $\int \frac{(x+3)\,dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+x+1}}$.

228. $\int \frac{(2x+3)\,dx}{(x^2+2x+3)\sqrt{x^2+2x+4}}$.

229. $\int \frac{x\,dx}{(x^2+x+2)\sqrt{4x^2+4x+3}}$.

230. $\int \frac{(2x+1)\,dx}{(3x^2+4x+4)\sqrt{x^2+6x-1}}$.

231. $\int \frac{x\,dx}{(3x^2+2x+3)\sqrt{4x^2-2x+4}}$.

Самый общий интеграл вида $\int f(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$, где $f(x, y)$ — рациональная функция от x и y, сводится к интегралам трех предыдущих видов. Для этого достаточно, уничтожая иррациональность в знаменателе, преобразовать функцию $f(x, y)$ к виду $\varphi(x)+\psi(x)y$, где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — рациональные функции от x. При этом $\psi(x)y = \frac{\psi(x)y^2}{y} = \frac{\psi(x)(ax^2+bx+c)}{y} = \frac{\omega(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$. Таким образом, дело сводится к нахождению интеграла от рациональной функции $\varphi(x)$ и от функции $\frac{\omega(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, где $\omega(x)$ — рациональная дробь. В последнем интеграле рациональную дробь $\omega(x)$ можно преобразовать выделением целой части и разложением на простейшие дроби. После этого получатся интегралы трех рассмотренных типов. В простых случаях часть этих преобразований отпадает.

Найти интегралы:

232. $\int \sqrt{\frac{a-x}{x-b}}\,dx$.

233. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2+2}\,dx$.

234. $\int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}\,dx$.

235. $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-1}}$.

236. $\int \frac{x+\sqrt{x^2-1}}{(x-1)^2}\,dx$.

237. $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-x+1}}$.

238. $\int \frac{x^2+x+1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}\,dx$.

239. $\int \frac{x^2\,dx}{2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}}$.

240. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$.

241. $\int \frac{x^3\,dx}{(x^2-1)\sqrt{x^2+2x+4}}$.

242. $\int \frac{dx}{(x^3-x)\sqrt{x^2+x+4}}$.

243. $\int \frac{x\,dx}{(x^2-1)\sqrt{x^2+2x+4}}$.

244. $\int \frac{dx}{(x^2+x-2)\sqrt{x^2+2x+3}}$.

245. $\int \frac{(x^2+1)\,dx}{(x^2-1)\sqrt{x^2-2x-1}}$.

Подстановкой Абеля иногда называют подстановку $\frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=u$, удобную при нахождении интеграла от функции $(ax^2+bx+c)^{-n-\frac{1}{2}}$, где n — целое число.

Найти интегралы:

246. $\int \frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)^3}}$. **247.** $\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2\sqrt{x^2+x+1}}$.

248. $\int \frac{(3x+2)\,dx}{(x^2+4x+1)^2\sqrt{x^2+4x+1}}$.

249. $\int \frac{(x^3+1)\,dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$.

Интегралы $\int f(x, y)\,dx$, где $f(x, y)$ — рациональная функция, а $y = \sqrt{Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E}$, называемые эллиптическими, вообще говоря не интегрируются в конечном виде, если нет особых соотношений между коэффициентами функции $f(x, y)$ или полинома $Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E$.

В следующих примерах, имеющих дело с возвратными полиномами, одна из подстановок $x+\frac{1}{x}=u$ или $x-\frac{1}{x}=v$ позволяет сравнительно просто получить интеграл.

250. $\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\frac{dx}{\sqrt{x^4+1}}$. **251.** $\int \frac{x^2+1}{x^2-1}\frac{dx}{\sqrt{x^4+1}}$.

252. $\int \frac{x^2-1}{x\sqrt{1+3x^2+x^4}}\,dx$. **253.** $\int \frac{(x^2+1)\,dx}{x\sqrt{x^4+3x^3-2x^2-3x+1}}$.

254. $\int \frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4}\,dx$. **255.** $\int \frac{x-1}{x+1}\frac{dx}{\sqrt{x(x^2+x+1)}}$.

Теорема Абеля. Пусть y — алгебраическая функция от x степени n, т. е. y удовлетворяет уравнению $\varphi(x, y)=0$, где $\varphi(x, y)$ — полином относительно x и y степени n относительно y. Если интеграл $\int f(x, y)\,dx$ от функции $f(x, y)$, рациональной относительно x и y, может быть выражен через алгебраические функции, то должно выполняться равенство: $\int f(x, y)\,dx = p_0(x)+p_1(x)\,y+\ldots+p_{n-1}(x)\,y^{n-1}$, где $p_0(x)$, $p_1(x), \ldots, p_{n-1}(x)$ — рациональные функции от x.

Следствие. Если $y=\sqrt[m]{\varphi(x)}$, где $\varphi(x)$ — полином степени n, и если интеграл $\int \frac{a_0x^\lambda+a_1x^{\lambda-1}+\ldots+a_\lambda}{y^k}\,dx$ выражается алгебраической функцией, то он должен равняться $f(x)\,y^{m-k}$, где $f(x)$ — полином степени $\lambda-n+1$.

Найти следующие алгебраические интегралы:

256. $\int \frac{3x^4+2x^3+8x^2+6x+2}{\sqrt[3]{(x^3+3x+1)^2}}\,dx.$ **257.** $\int \frac{5x^5+11x^3+3x^2}{\sqrt[3]{x^3+3x+1}}\,dx.$

258. $\int \frac{5x^7+17x^4+4x^3}{\sqrt[4]{(x^4+4x+1)^3}}\,dx.$

§ 4. Интегрирование трансцендентных функций

Интегралы, содержащие функции $\ln\varphi$, $\operatorname{arctg}\varphi$, $\arcsin\varphi$, где φ — некоторая алгебраическая функция от x, нередко интегрируют по частям, полагая $u=\ln\varphi$, $u=\operatorname{arctg}\varphi$, $u=\arcsin\varphi$. Этим способом находятся следующие интегралы:

259. $\int \ln x\,dx.$ **260.** $\int \frac{\ln x}{(2x+5)^3}\,dx.$

261. $\int \ln(1+x^2)\,dx.$ **262.** $\int \frac{\ln(x-1)}{(x+1)^3}\,dx.$

263. $\int \frac{\ln(x^2-x+1)}{x^2}\,dx.$ **264.** $\int \frac{x\ln x}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}\,dx.$

265. $\int \ln\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)dx.$ **266.** $\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx.$

267. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ln\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$ **268.** $\int \operatorname{arctg}x\,dx.$

269. $\int x^6\operatorname{arctg}x\,dx.$ **270.** $\int x^7\operatorname{arctg}x\,dx.$

271. $\int \arcsin x\,dx.$ **272.** $\int x\arcsin x\,dx.$

273. $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,dx.$ **274.** $\int \frac{x\arcsin x\,dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}.$

Интегралы, содержащие произведение полинома на одну из функций e^{ax}, $\cos ax$, $\sin bx$, лучше всего берутся по формуле многократного интегрирования по частям, которой можно придать такой вид:

$$\int uv^{(n)}\,dx = uv^{(n-1)} - u'v^{(n-2)} + u''v^{(n-3)} + \ldots + (-1)^m u^{(m)}v^{(n-m-1)} + (-1)^{m+1}\int u^{(m+1)}v^{(n-m-1)}\,dx.$$

Если u — полином степени m, то последний член обращается в нуль.

Доказать равенства, в которых $f(x)$ — полином степени m:

275. $$\int f(x)e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a}\left[f(x)-\frac{f'(x)}{a}+\frac{f''(x)}{a^2}-\ldots+(-1)^m\frac{f^{(m)}(x)}{a^m}\right]+C.$$

276. $$\int f(x)\cos ax\,dx = \frac{\sin ax}{a}\left[f(x) - \frac{f''(x)}{a^2} + \frac{f^{\mathrm{IV}}(x)}{a^4} - \ldots\right] + \\ + \frac{\cos ax}{a^2}\left[f'(x) - \frac{f'''(x)}{a^2} + \frac{f^{\mathrm{V}}(x)}{a^4} - \ldots\right] + C.$$

277. $$\int f(x)\sin ax\,dx = -\frac{\cos ax}{a}\left[f(x) - \frac{f''(x)}{a^2} + \frac{f^{\mathrm{IV}}(x)}{a^4} - \ldots\right] + \\ + \frac{\sin ax}{a^2}\left[f'(x) - \frac{f'''(x)}{a^2} + \frac{f^{\mathrm{V}}(x)}{a^4} - \ldots\right] + C.$$

Найти интегралы:

278. $\int x^4 e^{-x}\,dx.$ **279.** $\int x^5 \cos x\,dx.$

280. $\int x^3 \sin(2x+3)\,dx.$ **281.** $\int x^4 \sin x\,dx.$

282. $\int (x^3 - 2x^2 + 5)\, e^{3x}\,dx.$ **283.** $\int (x^2 + 3x + 5)\cos 2x\,dx.$

284. $\int x^3 e^{5x}\,dx.$ **285.** $\int (x^3 - x^2 + x)\sin x\,dx.$

Следующие интегралы, содержащие показательные функции, находятся интегрированием по частям, а также и простыми подстановками:

286. $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx.$ **287.** $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x + 1}}.$

288. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x} + e^x + 1}}.$ **289.** $\int x^5 e^{-x^2}\,dx.$

290. $\int x(x^2 + 1)\, e^{-x^2}\,dx.$ **291.** $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\,dx.$

292. $\int \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 3}{x^4}\, e^{-x}\,dx.$ **293.** $\int \frac{x^3 + 2x^2 - 2x - 2}{(x^2 + x)^2}\, e^x\,dx.$

Следующие интегралы удобнее всего находить, пользуясь тем, что формулы интегрирования для функций, содержащих e^{ax}, остаются в силе и для комплексных значений a. Отделив вещественную и мнимую части, получим равенства с вещественными интегралами. Этим путем находятся интегралы:

294. $\int e^{ax}\cos bx\,dx.$ **295.** $\int e^{ax}\sin bx\,dx.$

296. $\int x^2 \sin x\, e^x\,dx.$ **297.** $\int x^2 \cos x\, e^x\,dx.$

Ряд дальнейших интегралов относится к типу $\int f(\cos x, \sin x)\,dx$ где $f(u, v)$ — рациональная функция. Здесь полезно иметь в виду три правила:

a) если $f(\cos x, \sin x)$ умножается на -1 от перемены знака перед одной из величин $\cos x$ или $\sin x$, то полезно другую из них обозначить через t;

b) если $f(\cos x, \sin x)$ не меняется от перемены знака одновременно перед $\cos x$ и $\sin x$, то полезно положить $\operatorname{tg} x = t$ или $\operatorname{ctg} x = t$;

c) подстановка $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ во всех случаях обращает интеграл рассматриваемого типа в интеграл от рациональной дроби. К сожалению, эта подстановка приводит к более длинным вычислениям чем предыдущие, если они применимы.

Найти интегралы:

298. $\int \sin^3 x\,dx.$ **299.** $\int \sin^3 x \cos^4 x\,dx.$ **300.** $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\,dx.$

301. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x}.$ **302.** $\int \frac{dx}{\sin^3 x}.$ **303.** $\int \frac{dx}{\cos^5 x}.$

304. $\int \operatorname{tg}^6 x\,dx.$ **305.** $\int \operatorname{ctg}^3 x\,dx.$ **306.** $\int \frac{dx}{\cos^4 x}.$

307. $\int \sin^7 x \cos^6 x\,dx.$ **308.** $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x}\,dx.$ **309.** $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x}\,dx.$

310. $\int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x}.$ **311.** $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x}.$

Для интегралов $U_{m,n} = \int \sin^m x \cos^n x\,dx$ существуют формулы приведения, позволяющие сводить интегралы к другим, у которых значки m и n ближе к нулю. Эти формулы сводятся к четырем основным:

$$\begin{aligned}
(m+n)\,U_{m,n} &= -\sin^{m-1}x\cos^{n+1}x + (m-1)\,U_{m-2,n}\\
(m+n)\,U_{m,n} &= \sin^{m+1}x\cos^{n-1}x + (n-1)\,U_{m,n-2};\\
(n+1)\,U_{m,n} &= -\sin^{m-1}x\cos^{n+1}x + (m-1)\,U_{m-2,n+2};\\
(m+1)\,U_{m,n} &= \sin^{m+1}x\cos^{n-1}x + (n-1)\,U_{m+2,n-2}.
\end{aligned}$$

Обозначая через U_n интеграл $U_{0,n}$ и через V_m — интеграл $U_{m,0}$, получаем отсюда еще две формулы приведения для интегралов: $U_n = \int \cos^n x\,dx$ и $V_m = \int \sin^m x\,dx$:

$$\begin{aligned}
mV_m &= -\sin^{m-1}x\cos x + (m-1)\,V_{m-2},\\
nU_n &= \sin x\cos^{n-1}x + (n-1)\,U_{n-2}.
\end{aligned}$$

Пользуясь формулами приведения, найти интегралы:

312. $\int \sin^4 x \cos^2 x\,dx.$ **313.** $\int \sin^6 x \cos^4 x\,dx.$

314. $\int \sin^2 x \cos^6 x\,dx.$ **315.** $\int \sin^4 x \cos^6 x\,dx.$

316. $\int \sin^6 x\,dx.$ **317.** $\int \sin^8 x\,dx.$

318. $\int \frac{\cos^8 x}{\sin^2 x}\,dx.$ **319.** $\int \frac{\sin^{10} x}{\cos^4 x}\,dx.$

В дальнейшем приводится ряд интегралов от тригонометрических функций, находимых разными приемами.

320. Найти интеграл $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx$, сравнив числитель с производной от знаменателя.

321. Найти интеграл $\int \frac{3\cos x + 7\sin x}{5\cos x + 2\sin x} dx$, представив числитель в виде $Au + Bu'$, где $u = 5\cos x + 2\sin x$.

322. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$, приведя знаменатель к логарифмическому виду.

323. Применить такой же прием к интегралу $\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x}$.

324. Найти интеграл $\int \sqrt{1 + \sin x}\, dx$, пользуясь тем, что $1 = \cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}$.

Подстановкой $\operatorname{tg} x = t$ найти интегралы:

325. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{\sin^3 x \cos^5 x}}$.

326. $\int \sqrt{\frac{\sin^3 x}{\cos^7 x}}\, dx$.

327. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}}$.

328. $\int \sqrt{\operatorname{tg} x}\, dx$.

329. $\int \frac{dx}{1 + \operatorname{tg} x}$.

330. $\int \frac{dx}{4 + 3\operatorname{tg} x}$.

331. $\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}$.

332. $\int \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{(4 + \operatorname{tg}^2 x)\operatorname{tg}^3 x} dx$.

333. $\int \frac{1 + \operatorname{tg} x}{\sin 2x} dx$.

334. $\int \frac{dx}{2 + 3\cos^2 x}$.

335. $\int \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{(\cos^3 x + \sin^3 x)^2} dx$.

336. $\int \frac{dx}{a^2 - b^2\sin^2 x}$; $a^2 \neq b^2$.

337. $\int \frac{2\sqrt{\operatorname{tg} x - 1}}{(1 + \cos 2x)\sqrt{1 + \operatorname{tg} x}} dx$.

338. $\int \frac{\cos x\, dx}{\sin^3 x - \cos^3 x}$.

Найти интегралы:

339. $\int \frac{\sin 2x\, dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$.

340. $\int \frac{\cos 2x\, dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$.

341. $\int \frac{\sin 2x}{\cos^3 x} dx$.

342. $\int \frac{\sin 3x}{\cos x} dx$.

343. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin x \cos 3x} dx$.

344. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin 4x} dx$.

345. $\int \frac{\cos^4 x}{\sin 6x} dx$.

346. $\int \frac{\cos 2x}{\sin^4 x} dx$.

347. $\int \frac{\cos 2x}{\sin^6 x}\,dx.$ **348.** $\int \frac{\cos 3x}{\cos^4 x}\,dx.$

349. $\int \frac{\cos 3x}{\sin^5 x}\,dx.$ **350.** $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}}\,dx.$

351. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin 2x}}\,dx.$ **352.** $\int \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{\sin 2x}}\,dx.$

Замечание. Здесь полезна подстановка $\frac{\pi}{4} - x = t.$

353. $\int \frac{dx}{a + b\cos x}$ при $a^2 > b^2$ и при $a^2 < b^2$.

Следующие интегралы содержат гиперболические функции. В этих примерах их удобно выразить через показательные функции:

354. $\int \frac{x + \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}\,dx.$ **355.** $\int \frac{\operatorname{ch}^3 x - \operatorname{sh}^3 x}{\operatorname{ch}^3 x + \operatorname{sh}^3 x}\,dx.$

356. $\int \sqrt{\operatorname{th} x}\,dx.$ **357.** $\int \frac{\operatorname{th} x}{\sqrt{1 - \operatorname{th} x}}\,dx.$

358. $\int (\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)\sqrt{\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}\,dx.$

В дальнейших примерах удобнее не выражать гиперболические функции через показательные.

359. $\int \frac{dx}{(1 - \operatorname{ch} x)^2}.$ **360.** $\int \frac{dx}{(1 + \operatorname{ch}^2 x)^2}.$

361. $\int \frac{\operatorname{ch}^3 x\,dx}{1 - \operatorname{th} x}.$ **362.** $\int \frac{dx}{1 - \operatorname{sh}^4 x}.$

363. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^3 x}.$ **364.** $\int \frac{\operatorname{sh}^3 x\,dx}{\sqrt{\operatorname{ch} x}}.$

365. $\int \operatorname{th}^3 x\,dx.$ **366.** $\int \operatorname{ch} x \operatorname{ch} 2x \operatorname{ch} 3x\,dx.$

§ 5. Разные задачи

367. $\int \frac{x^2 + x - 1}{x^3 - x^2 - x + 1}\,dx.$ **368.** $\int \frac{x\,dx}{(x-1)^3(x-2)^2}.$

369. $\int \frac{x^5\,dx}{(x-1)^2(x^2-1)}.$ **370.** $\int \frac{x^2\,dx}{(x-a)(x-b)(x-c)}.$

371. $\int \frac{dx}{x^5 + 2x^3 + 3x^2}.$ **372.** $\int \frac{x^2 - 1}{x^4 - x^2 + 1}\,dx.$

373. $\int \frac{x^2(1-x^2)}{(1+x^2)^3}\,dx.$ **374.** $\int \frac{x^2\,dx}{x^4 + x^2 - 2}.$

375. $\int \frac{x\,dx}{(x^2 + 2x + 2)^2}.$ **376.** $\int \frac{x^9\,dx}{(x^2-1)^3}.$

377. $\displaystyle\int \frac{x^3+3x}{(x^2-1)(x^2+1)^2}\,dx.$

378. $\displaystyle\int x\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\,dx.$

379. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{1+\sqrt{x-1}}.$

380. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x}}.$

381. $\displaystyle\int \frac{x+\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x+1}}\,dx.$

382. $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}}.$

383. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(a+bx)^{\frac{3}{2}}}.$

384. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(a+bx^2)^{\frac{3}{2}}}.$

385. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^8\sqrt{x-1}}.$

386. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^{\frac{3}{4}}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)}.$

387. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{ax+bx^4}}.$

388. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}.$

389. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1-\sqrt{1-x^2})^2}.$

390. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+\sqrt{x})\sqrt{x-x^2}}.$

391. $\displaystyle\int \frac{dx}{(2x-1)\sqrt{1-x^2}}.$

392. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)^2\sqrt{1-x^2}}.$

393. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}.$

394. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a+bx^2}}{x^6}\,dx.$

395. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-x}}.$

396. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)^2\sqrt{x^2+1}}.$

397. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2+1}}.$

398. $\displaystyle\int \frac{(2-x^3)\,dx}{(1+x^3)\sqrt{1+x^3}}.$

399. $\displaystyle\int \frac{x+1}{x-2}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}.$

400. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2-x^4}}.$

401. $\displaystyle\int x\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}\,dx.$

402. $\displaystyle\int \frac{(x^2-a^2)\,dx}{x\sqrt{a^4+x^4}}.$

403. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^4)\sqrt{\sqrt{1+x^4}-x^2}}.$

404. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(x-2)(2-3x+x^3)}}.$

405. $\displaystyle\int \frac{3x^2+5x^6}{\sqrt{1+x^4}}\,dx.$

406. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^{2k-2}x^{2k}}}.$

407. $\displaystyle\int \frac{(x^4-a^4)\,dx}{(x^4+a^4)\sqrt{x^4+a^4}}.$

408. $\displaystyle\int \frac{1+x^2}{1-2x^2\cos\alpha+x^4}\,dx.$

409. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(x\sin x+\cos x)^2}.$

410. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(\sin x-x\cos x)^2}.$

411. $\displaystyle\int \frac{dx}{[a+(ax+b)\operatorname{tg} x]^2}.$

412. $\displaystyle\int \frac{a+x}{x^2+ax\ln x}\,dx.$

413. $\displaystyle\int \frac{1-\ln x}{(x+a\ln x)^2}\,dx.$

414. $\displaystyle\int \frac{1+x\ln x}{x}\,e^x\,dx.$

415. $\int \left(\frac{1-x}{1+x^2}\right)^2 e^x\,dx.$

416. $\int \frac{1+x^2}{(1+x)^2} e^x\,dx.$

417. $\int e^{\operatorname{arctg} x}(1+2x)\,dx.$

418. $\int e^{\sqrt{x}} x\,dx.$

419. $\int \frac{xe^x}{(e^x-1)^3}\,dx.$

420. $\int \frac{dx}{\cos x - 2\operatorname{tg} x}.$

421. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos x}.$

422. $\int \frac{dx}{1-\cos^4 x}.$

423. $\int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x}.$

424. $\int \frac{\ln \operatorname{tg} x\,dx}{\cos^4 x}.$

425. $\int \frac{\cos^3 x\,dx}{\sin x\,(1+a^2\cos^2 x)}.$

426. $\int \frac{\cos^2 x}{3+\sin x}\,dx.$

427. $\int \frac{dx}{\sin x\sqrt{\cos 2x}}.$

428. $\int \operatorname{tg} x\sqrt{\cos 2x}\,dx.$

429. $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3\sin x+\sin^2 x}}.$

430. $\int \frac{\sqrt{\sin x}}{1+\sin^2 x}\,dx.$

431. $\int (b^2-a^2\operatorname{tg}^2 x)^{\frac{3}{2}}\,dx.$

432. $\int \frac{dx}{\cos x\sqrt{\cos 2x}}.$

433. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx.$

434. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

435. $\int e^{a\cdot\operatorname{arctg} x}\frac{x\,dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}.$

436. $\int e^{\sin x}\sin 2x\,dx.$

437. $\int e^x\sin^2 x\,dx.$

438. $\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}\,dx.$

439. $\int \frac{(x+1)\ln(x+1)}{\sqrt{x^2+2x+3}}\,dx.$

440. $\int \ln(\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b})\,dx.$

441. $\int \frac{dx}{2^x+1}.$

442. $\int \frac{x+1}{2^x}\,dx.$

443. $\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{\cos^3 2x}}.$

444. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{\cos^3 2x}}.$

445. $\int \frac{dx}{\sin x\sqrt[4]{\cos 2x}}.$

446. $\int \sin^{n-1} x\cos(n+1)x\,dx.$

447. $\int \sin^{n-1} x\sin(n+1)x\,dx.$

448. $\int \frac{dx}{a+b\cos x+c\sin x}.$

449. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{ctg} x}-\sqrt{\operatorname{tg} x}}{1+3\sin 2x}\,dx.$

450. $\int x^{\sqrt{2}}\sin\ln x\,dx.$

451. $\int \frac{\ln(\cos\varphi+\sqrt{\cos 2\varphi})}{1-\cos^2\varphi}\,d\varphi.$

452. $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x\,dx.$

453. $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin^2 x} e^x \, dx.$

454. $\int \frac{\sin x}{\sin (x - \alpha)} \, dx.$

455. $\int \frac{a \sin x + b \cos x}{\sqrt{1 + \sin x \cos x}} \, dx.$

456. $\int \frac{dx}{\cos x \cos (x - \alpha)}.$

457. $\int \frac{dx}{\sqrt{a + b + (a + 2b) \cos x + b \cos 2x}}.$

458. $\int \frac{dx}{\cos^3 x + \sin^3 x}.$

459. $\int \frac{dx}{\cos^5 x - \sin^5 x}.$

460. $\int x^2 \sin^3 x \, dx.$

ОТДЕЛ ВОСЬМОЙ
ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

§ 1. Определенный интеграл

Определенные интегралы могут вычисляться с помощью неопределенных интегралов по теореме Барроу — Ньютона, т. е. по формуле

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ — функция, производная от которой в интервале (a, b) равна непрерывной функции $f(x)$. Такая же формула применима и для интегралов с бесконечными пределами. При этом, если, например, $b = \infty$, то

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \int_a^n f(x)\,dx, \quad F(\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x).$$

Найти величины следующих определенных интегралов:

461. $\int_0^1 \sqrt[m]{x^n}\,dx \quad n > 0.$ **462.** $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[m]{x^n}} \quad m > n.$

463. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}.$ **464.** $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+3}.$ **465.** $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x}.$

466. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} x\,dx.$ **467.** $\int_0^a \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$ **468.** $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$

469. $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+a^2}.$ **470.** $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2}.$ **471.** $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2-1}.$

472. Доказать равенство:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx; \quad n > -1.$$

473. Доказать равенство:

$$\int_{-a}^{a} \frac{dx}{\sqrt{a^2+b^2-2bx}} = \begin{cases} 2 \text{ при } b \leqslant a \\ \frac{2a}{b} \text{ при } b \geqslant a. \end{cases}$$

474. $\int_0^1 \frac{x^2-1}{(x+2)^4}\,dx.$

475. $\int_0^1 \frac{x^3}{(x^3+1)^2}\,dx.$

476. $\int_0^\infty \frac{x^2(1-x^2)}{(1+x^2)^3}\,dx.$

477. $\int_1^\infty \frac{dx}{x(1+x^4)^3}.$

478. $\int_1^\infty \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}\,dx.$

479. $\int_0^{2\pi} \frac{a+\cos x}{1+2a\cos x+a^2}\,dx.$

480. $\int_0^1 e^{-x}\sin \pi x\,dx.$

481. $\int_0^\pi x^2 \sin nx\,dx$, n — целое.

482. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\operatorname{tg} x}\,dx.$

483. $\int_{-1}^1 e^{k \arcsin x}\,dx.$

484. $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{e^x+a^2}}.$

485. $\int_0^1 \frac{x^3 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

486. Доказать, что площадь, ограниченная дугой синусоиды $y=\sin x$ и осью Ox между точками $(0, 0)$ и $(\pi, 0)$, равна двум квадратным единицам.

487. Доказать, что площадь криволинейной трапеции, ограниченной снизу отрезком оси Ox между точками $(N, 0)$ и $(2N, 0)$, с боков вертикалями, а сверху гиперболой $y=\frac{1}{x}$, равна $\ln 2$.

488. Доказать, что площадь всей лемнискаты Бернулли $r^2=a^2\cos 2\varphi$ равна a^2.

489. Доказать, что площадь сегмента между параболой $y=ax^2$ и прямой $y=h$ равна произведению $\frac{2}{3}$ основания на высоту. (Архимед.)

490. Доказать, что объем параболоида вращения, имеющего с данным цилиндром общие основание и высоту, равна половине объема цилиндра. (Архимед.)

491. Из сосуда, имеющего форму цилиндра с радиусом a и высотой h, выливается через край жидкость. Доказать, что в тот момент, когда обнажилась половина дна, объем оставшейся жидкости равен $\frac{2}{3}a^2h$. (Архимед.)

492. Доказать, что объем кувшина, получающегося при вращении синусоиды $y = r + b \sin \frac{2\pi x}{h}$ вокруг оси Ox при $0 < x < h$, равен $\pi r^2 h + \frac{1}{2}\pi b^2 h$.

493. Стержень, длиной l, вращается вокруг своего конца, совершая n оборотов в секунду. Определить величину натяжения в точке прикрепления, если вес единицы длины стержня равен σ, а центробежная сила для массы m, движущейся по окружности радиуса r с угловой скоростью ω, равна $mr\omega^2$.

494. Под действием нагрузки f проволока длиной l с поперечным сечением s и модулем Юнга E получает удлинение Δl, равное $\frac{fl}{Es}$. Определить удлинение такой проволоки, висящей вертикально, под действием своей тяжести. Удельный вес вещества проволоки равен δ.

495. От нагрузки в 1 *кг* проволока растягивается на 1 *см*. Какую работу надо совершить, чтобы растянуть ее на 4 *см*?

496. Найти величину давления воды на вертикальную стенку треугольной формы. Высота треугольника h, основание a — на поверхности жидкости.

497. Тот же вопрос для стенки в форме полукруга, диаметр которого, длиной $2a$, — на поверхности воды.

498. Какую работу надо затратить, чтобы насыпать кучу песка конической формы с радиусом 1,2 *м* и высотой 1 *м*, если удельный вес песка 2?

499. Найти положение центра тяжести однородного конуса.

500. Найти центр тяжести полушара с радиусом R.

501. Цилиндр с радиусом 15 *см* и высотой 60 *см* наполнен воздухом под давлением 1 *кг* на *кв. см*. Какую работу надо совершить при изотермическом сжатии газа до объема в два раза меньшего?

502. Точка движется по оси Ox, начиная от точки (1, 0), так, что скорость ее численно равна абсциссе. Где она будет через 10 секунд от начала движения?

503. Электрические заряды отталкивают друг друга с силой $\frac{e_1 e_2}{r^2}$, где e_1 и e_2 — величины зарядов, а r — расстояние между ними. Определить работу, необходимую, чтобы приблизить заряд $e_2 = 1$ к заряду e_1 из бесконечности на расстояние, равное R?

504. Земля притягивает тело массы m с силой $f = mg\frac{R^2}{r^2}$, где R — радиус земли, а r — расстояние тела до центра земли ($r \geqslant R$).

Определить величину работы, нужной, чтобы удалить тело в бесконечность с поверхности земли.

505. По закону Джоуля количество тепла, выделяемого постоянным током равно Rci^2t, где $c=0{,}24$ постоянная, R — сопротивление, t — число секунд, i — сила тока. Найти выделяемое тепло, для переменного тока: $i=a\cos bt$.

506. По закону Торичелли скорость вытекающей жидкости равна $\sqrt{2gh}$, где h — глубина отверстия под уровнем жидкости. Определить время вытекания жидкости из цилиндра с высотой h и поперечным сечением s сквозь отверстие в дне с площадью σ.

507. Тот же вопрос для конической воронки с вершиной внизу; s — площадь основания, h — высота воронки.

508. Диск, толщиной h и радиусом r, состоит из вещества с удельным весом δ и совершает n оборотов в секунду. Какую работу он совершит при торможении.

509. На картах проекции Меркатора масштаб изображения в отдельных частях ее увеличивается от экватора к полюсу так, что расстояние между двумя меридианами остается постоянным. Расстояние между меридианами, проведенными через 10°, равно a. Найти расстояние между экватором и параллелью $\varphi°$.

§ 2. Вычисление площадей (квадратура кривых)

510. Доказать, что площадь S криволинейной трапеции, ограниченной осью Ox, прямыми $x=a$, $x=b$ и кубической параболой $y=Ax^3+Bx^2+Cx+D$, можно выразить формулой

$$S=\frac{b-a}{6}(y_0+4y_1+y_2),$$

где y_0, y_1 и y_2 — ординаты при $x=a$, $\frac{a+b}{2}$ и b.

511. Доказать, что площадь криволинейной трапеции, ограниченной осью Ox, прямыми $x=-h$, $x=k$ и параболой, проходящей через точки:

$$(-h;\ y_1);\ (0;\ y_2);\ (k;\ y_3)$$

можно выразить формулой:

$$S=\frac{k+h}{6}\left[\left(2-\frac{k}{h}\right)y_1+\left(1+\frac{k}{h}\right)\left(1+\frac{h}{k}\right)y_2+\left(2-\frac{h}{k}\right)y_3\right].$$

512. Доказать, что площадь S криволинейной трапеции, ограниченной осью Ox, прямыми $x=a$, $x=b$ и параболой $y=Ax^3+Bx^2+Cx+D$, можно вычислять по формуле

$$S=\frac{b-a}{3}(y_1+y_2+y_3),$$

где y_1, y_2, y_3 — значения y при $x=\frac{a+b}{2}-\frac{b-a}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x=\frac{a+b}{2}$, $x=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}$. (Чебышев.)

513. Доказать, что такую же площадь для параболы 5-го порядка $y=Ax^5+Bx^4+Cx^3+Dx^2+Ex+F$ можно вычислять по формуле, $S=\frac{b-a}{18}(5y_1+8y_2+5y_3)$, где y_1, y_2 и y_3 — значения y при $x=\frac{a+b}{2}-\frac{b-a}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}$, $x=\frac{a+b}{2}$, $x=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}$. (Гаусс.)

514. Доказать, что площадь S сегмента параболы можно выразить формулой $S=\frac{2}{3}lh$, где l — длина хорды сегмента, а h — высота сегмента.

515. Найти площадь фигуры, ограничиваемой параболами

$$y=x^2, \quad y^2=x.$$

516. Найти площадь, ограниченную одной дугой циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ и осью Ox.

517. Найти площадь кардиоиды $r=a(1+\cos\varphi)$.

518. Найти площадь между Oy и кривой $y=\pm\sqrt{\frac{1-x}{x}}$.

519. Найти площадь астроиды $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$, приведя ее уравнение к параметрическому виду.

520. Найти площадь, ограниченную кривой $x^4+y^4=x^2+y^2$, перейдя к полярным координатам.

Путем перехода к полярным координатам найти площади кривых:

521. Петли листа Декарта $x^3+y^3=3axy$.

522. Лемнискаты $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$.

523. Подэры эллипса $(x^2+y^2)^2=a^2x^2+b^2y^2$.

524. Найти площадь, ограниченную осью Ox и трактрисой

$$x=a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}-\sqrt{a^2-y^2}, \ 0<y<a.$$

При этом удобно ввести параметр φ, положив $y=a\sin\varphi$.

525. Найти площадь, лежащую внутри круга $x^2+y^2=4px$ и параболы $y^2=2px$.

526. Найти площадь между кривыми $y^2=2px$ и $27py^2=8(x-p)^3$.

527. Найти площадь между параболой и какою-либо из ее нормалей.

528. К параболе провести нормаль, отсекающую от нее сегмент наименьшей площади.

529. Найти площадь, лежащую выше оси Ox и ограниченную линиями:

$$y^2 = 4ax; \quad x^2 + y^2 = 2ax; \quad 2x - y = 4a.$$

530. Найти площадь криволинейного четырехугольника, ограниченного параболами:

$$y^2 - 9ax + 81a^2 = 0; \quad y^2 - 4ax + 16a^2 = 0; \quad y^2 - ax + a^2 = 0$$

и осью Ox. Показать, что эта площадь равна площади, ограниченной хордами.

531. Определить площадь, лежащую между кругом $x^2 + y^2 = a^2$ и его подерой, относительно внутренней точки $(b;\ 0)$.

532. Циклоида $x = a(t - \sin t)$; $y = a(1 - \cos t)$ пересечена прямой $y = ka$ (причем $0 < k < 2$). Определить площади, ограниченные этими линиями.

533. Удлиненная циклоида $x = a(kt - \sin t)$ $y = a - a\cos t$ (причем $0 < k < 1$) образует петли. Определить площадь петли. (В частности при $k = \frac{2}{\pi}$; $k = \frac{3}{5\pi}$.)

534. Найти площадь петли строфоиды

$$(a - x)\,y^2 = (a + x)\,x^2.$$

535. Найти площадь, ограниченную линиями:

$$y(x^2 + 4) = 4(2 - x); \quad x = 0, \quad y = 0.$$

536. Найти площадь, ограниченную линией $(y - x)^2 = x^3$ и осью Ox.

537. Найти площадь, ограниченную полуволной кривой $y = \sin^3 x + \cos^3 x$ и осью Ox.

538. Определить площадь, ограниченную параболой $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1$ и осями координат.

539. Определить одну из площадей между эллипсом $\frac{x^2}{20a^2} + \frac{y^2}{5a^2} = 1$ и гиперболой $xy = 4a^2$.

540. Определить площадь между параболой $ay = (x - 3a)^2$ и гиперболой $xy = 4a^2$.

541. Определить площадь между осью Ox и эвольвентой круга

$$x = a(\cos t + t\sin t),$$
$$y = a(\sin t - t\cos t)$$

и ее первой вертикальной касательной.

542. Определить площадь части эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, лежащей вне круга $x^2 + y^2 = ab$.

543. Определить площадь криволинейного квадрата, принадлежащего обоим эллипсам

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;\quad \frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1.$$

544. Показать, что площадь между одной аркой эпициклоиды и основным кругом равна $\pi b^2\left(3+2\frac{b}{a}\right)$, где a и b соответственно радиусы основного и катящегося кругов.

Найти площади, ограниченные линиями, заданными в полярных координатах:

545. $r=a\cos\varphi$.

546. $r=a\cos 2\varphi$.

547. $r=a\cos 3\varphi$.

548. $r=a\cos 4\varphi$.

549. $r^2=a^2\frac{\sin 3\varphi}{\sin\varphi}$ при $0<\varphi<\frac{\pi}{3}$.

550. Эллипса $r=\frac{p}{1+e\cos\varphi}$, $e<1$, $0<\varphi<\varphi_0$.

551. Гиперболы $r=\frac{p}{1+e\cos\varphi}$, $e>1$, $0<\varphi<\varphi_0$; $e\cos\varphi_0>-1$.

552. Равнобочной гиперболы $r^2\cos 2\varphi=a^2$ при $-\varphi_0<\varphi<\varphi_0$.

553. Кривой $r=a\sqrt{1+\omega^2}$, $\varphi=\omega-\operatorname{arctg}\omega$, $0<\omega<\omega_0$.

554. Кривой $r=\frac{a}{\sqrt{1+\omega^2}}$, $\varphi=\omega-\operatorname{arctg}\omega$, $0<\omega<\omega_0$.

555. Конхоида Никомеда $r=\frac{a}{\sin\varphi}\pm b$, при $a<b$, имеет петлю. Найти площадь петли.

556. Найти площадь, ограниченную внешним контуром кривой $r^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}\cos\frac{2}{3}\varphi$.

557. Кривая $r=a\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos\frac{\varphi}{2}\right)$ имеет три петли, площади которых: $a^2\left(\frac{5}{4}\pi+2\sqrt{3}\right)$; $a^2\left(\frac{5}{6}\pi-\frac{5}{4}\sqrt{3}\right)$; $a^2\left(\frac{5}{12}\pi-\frac{3}{4}\sqrt{3}\right)$. Проверить.

558. Определить площадь, лежащую между петлями улитки Паскаля $r=a+b\cos\varphi$, при $a<b$.

559. Найти площадь, лежащую между кривыми

$$r^2\cos 2\varphi=4a^2\cos^4\varphi \quad\text{и}\quad r^2\cos 2\varphi=a^2.$$

560. Определить площадь луночки, лежащей внутри лемнискаты $r^2=a^2\cos 2\varphi$ и вне окружности $r=\frac{a}{\sqrt{2}}$.

561. Определить площади, ограниченные дугами кардиоиды $r = a(1+\cos\varphi)$ и окружности $r = \frac{3}{2}a$.

562. Определить площадь одной петли кривой

$$(x^2+y^2)^2 - 4axy^2 = 0.$$

563. Определить площадь, ограниченную кривой

$$x^4+y^4 = 2a^2xy.$$

564. В каком отношении делит прямая $x+y=2a$ площадь петли листа Декарта $x^3+y^3=3axy$.

565. В каком отношении делит площадь петли листа Декарта $x^3+y^3=3axy$ парабола $y^2=ax$.

566. Дан эллипс: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ и эллипс, получаемый из него поворотом около центра на угол $\alpha < \frac{\pi}{2}$. Определить площадь, занятую всеми точками, лежащими внутри того или другого эллипса.

567. Определить площадь луночки, лежащей внутри одного и вне другого эллипса предыдущей задачи.

568. Определить площадь, ограниченную петлей кривой $x^7+y^7 = ax^3y^3$.

569. Определить площадь, ограниченную кривой

$$x = a\cos t; \quad y = \frac{a\sin^2 t}{2+\cos t}.$$

§ 3. Вычисление длин дуг кривых

Найти длины дуг следующих кривых:

570. $y = \sqrt{x}$ при $0 < x < 1$.

571. $y = \ln x$ при $\sqrt{3} < x < \sqrt{8}$.

572. $y = a\ln\cos\frac{x}{a}$ при $0 < x < b$.

573. $y = a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}$ при $0 < x < x_0$.

574. $y = \frac{x-3a}{3}\sqrt{\frac{x}{a}}$ при $0 < x < x_0$.

575. $y = 2a\ln\frac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}} - 4\sqrt{ax}$ при $0 < x < x_0$.

576. $x = a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y} - \sqrt{a^2-y^2}$ при $b < y < a$.

577. $y^3 = px^2$ при $0 < y < y_0$.

578. $(2a-x)y^2 = x^3$ при $0 < x < x_0$, где $x_0 < 2a$.

579. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$. Полный обвод.

580. $x=a\cos^5 t$, $y=a\sin^5 t$. Полный обвод.

581. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$. Одной арки.

582. $r=a(1+\cos\varphi)$. Полный обвод.

583. Первого витка спирали Архимеда $r=a\varphi$.

584. Логарифмической спирали $r=ae^{m\varphi}$, $0<r<a$.

585. Доказать, что длина одной дуги эпициклоиды

$$x=a[(n+1)\cos t-\cos(n+1)t],\quad y=a[(n+1)\sin t-\sin(n+1)t]$$

равна $8a\frac{n+1}{n}$.

586. Доказать, что длина одной дуги гипоциклоиды

$$x=a[(n-1)\cos t+\cos(n-1)t],\quad y=a[(n-1)\sin t-\sin(n-1)t]$$

равна $8a\frac{n-1}{n}$.

587. Определить длину дуги кривой $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ между ее точками прикосновения с осями координат.

588. Найти длину всей кривой $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1$.

589. Найти длину дуги кривой:

$$x=8at^3;\quad y=3a(2t^2-t^4),$$

лежащей над осью Ox.

590. Парабола $4ay=x^2$ катится по оси Ox. Доказать, что ее фокус описывает цепную линию $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$.

591. Доказать, что при качении кардиоиды $r=a(1-\sin\varphi)$ по циклоиде $x=a(t-\sin t)$; $y=a(1-\cos t)$ острие ее описывает прямую линию.

Найти длины дуг следующих кривых в пространстве:

592. $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$ при $0<t<t_0$.

593. $x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$, $z=e^t$ при $-\infty<t<0$.

594. $x=at$, $y=\sqrt{3ab}\,t^2$, $z=2bt^3$ при $0<t<t_0$.

595. $x^2=3y$, $2xy=9z$ при $0<x<x_0$.

596. $y=a\arcsin\frac{x}{a}$, $z=\frac{a}{4}\ln\frac{a+x}{a-x}$ при $0<x<x_0$.

597. $y^2=2ax-x^2$, $z=-a\ln\left(1-\frac{x}{2a}\right)$; $0<x<x_0$.

598. $4ax=(y+z)^2$, $4x^2+3y^2=3z^2$; $0<x<x_0$.

599. $(y-z)^2=3a(y+z)$; $9x^2+8y^2=8z^2$; $0<x<x_0$.

600. $x^2+y^2=az$, $y=x\operatorname{tg}\frac{z}{a}$.

601. $x^2+y^2+z^2=a^2$, $\sqrt{x^2+y^2}\operatorname{ch}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=a$.

§ 4. Вычисление объемов

Найти объемы тел, полученных при вращении следующих линий:

602. Гиперболы $xy = a^2$ вокруг оси Ox при $a < x < \infty$.

603. Синусоиды $y = \sin x$ около оси Ox при $0 < x < \pi$.

604. Циссоиды $(2a - x)y^2 = x^3$ около Ox при $0 < x < b < 2a$.

605. Лемнискаты $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ около Ox.

606. Кардиоиды $r = a(1 + \cos\varphi)$ около полярной оси.

607. Циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ около Ox, при $0 < x < 2\pi a$.

608. Параболы $y^2 = 2px$ около Ox при $0 < x < a$.

609. Эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ вокруг оси Ox.

610. Гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ вокруг Ox при $a < x < m$.

611. Той же гиперболы, что и в 610 вокруг Oy при $0 < y < h$.

612. Циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ около прямой $x = \pi a$.

613. Циклоида $x = a(t - \sin t)$; $y = a(1 - \cos t)$ вращается около пересекающей ее прямой $y = ka$ причем $0 < k < 2$. Определить объемы получающихся тел вращения.

614. Найти объем, получающийся от вращения около полярной оси одной петли лемнискаты

$$r^2 = a^2 \sin 2\varphi.$$

615. Кривая $y = \frac{4a^3}{x^2 + 4a^2}$ вращается вокруг своей асимптоты. Найти объем полученного бесконечного веретена.

616. Кривая $r^3 = a^3 \cos 3\varphi$ вращается около полярной оси. Определить объем тела, полученного от вращения петли, лежащей в третьем квадранте.

617. Дуга параболы $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1$ вращается вокруг прямой $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. Доказать, что объем полученного тела вращения $V = \frac{8}{15} S_м \cdot H$, где $S_м$ — площадь наибольшего поперечного кругового сечения, и H — длина этого веретенообразного тела.

618. Сегмент круга радиуса R, соответствующий центральному углу 2α, вращается вокруг своей хорды. Определить объем полученного тела.

619. Улитка Паскаля $r = a + b\cos\varphi$ вращается вокруг полярной оси. Определить объемы:

1) ограниченный поверхностью вращения, когда $a > b$;

2) ограниченный внешней поверхностью вращения, когда $a < b$;

3) полости между полученными поверхностями вращения, когда $a < b$,

620. Найти объем тела, ограниченного поверхностью, полученной вращением дуги параболы $y^2=4ax$ около прямой $y=2x$.

621. Куб с ребром a вращается вокруг своей пространственной диагонали. Определить объем тела, полученного от вращения одной грани.

622. Куб с ребром a вращается вокруг диагонали одной из своих граней. Определить объем тела, полученного от вращения противоположной грани.

623. Кривая $x^4+y^4=2axy^2$ вращается вокруг оси Oy. Определить объем полученного тела.

624. Та же задача, что и 623, но кривая вращается около оси Ox.

При решении следующих задач полезно применять формулу для вычисления объемов

$$V=\int_a^b S(x)\,dx,$$

где $S(x)$ — площадь сечения тела, перпендикулярного оси Ox и удаленного от начала на x. Вместо оси Ox можно взять любую другую ось.

625. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z^2+y^2=1$; $x^2+z^2=1$, рассмотрев горизонтальные сечения.

626. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=ax$, $x-z=0$, $x+z=0$, рассмотрев сечения, перпендикулярные Ox.

Найти объемы тел, ограниченных поверхностями:

627. $x^2+4y^2=8z$, $x^2+4y^2=1$, $z=0$.

628. $y^2=2p(a-x)$, $x-z=0$, $x-2z=0$.

629. $z^2=(a-x-y)a$; $x=0$, $y=0$, $z=0$.

630. $z^2=b(a-x)$, $x^2+y^2=ax$.

631. $z=0$, $by=x(a-z)$, $by=-x(a-z)$, $x=b$.

632. $y^2+z^2=a^2\operatorname{ch}^2\frac{x}{a}$, $-b<x<b$.

633. В прямой круговой цилиндр (стакан) радиуса r налита вода. Ось наклонена под углом α к горизонту. Часть дна, покрытая водой, — сегмент с центральным углом 2φ. Найти объем воды.

634. Прямой круговой конус рассечен на две части плоскостью, проходящей через центр основания и параллельной образующей. Найти объем частей конуса, учитывая, что сечения конуса плоскостями, параллельными образующей, суть параболические сегменты.

635. Четверть прямого кругового цилиндра рассечена наклонной плоскостью, проходящей через радиус верхнего основания и конец радиуса нижнего основания, перпендикулярного к первому радиусу. Через ось цилиндра проведена плоскость под углом φ к упомянутому радиусу верхнего основания. Найти объемы четырех частей четверти цилиндра.

636. Найти объем, ограниченный поверхностью коноида $a^2l^2y^2 = b^2x^2(a^2 - z^2)$ и плоскостью $x = l$.

637. Три взаимно перпендикулярные прямые являются осями трех круговых цилиндров одинакового радиуса r. Определить объем тела, лежащего внутри их всех.

638. Оси двух круговых цилиндров радиуса r пересекаются под углом α. Определить объем тела, ограниченного этими цилиндрами.

§ 5. Вычисление площадей поверхностей вращения

При вращении дуги плоской кривой M_1M_2 вокруг оси, лежащей в ее плоскости, площадь полученной поверхности вычисляется по формуле

$$S = 2\pi \int\limits_{(M_1M_2)} |\rho|\, ds,$$

где $|\rho|$ — расстояние элемента дуги ds от оси вращения.

Найти площади поверхностей, полученных вращением указанных кривых вокруг данных осей:

639. $y = \sin x$ вокруг Ox при $0 < x < \pi$.

640. $y = \operatorname{tg} x$ вокруг Ox при $0 < x < u < \frac{\pi}{2}$.

641. $y^2 + x^2 = 2ay$ вокруг Ox.

642. $x^2 + (y - b)^2 = r^2$; $b > r$; вокруг Ox.

643. $y^2 = 2px$ вокруг Ox при $0 < x < a$.

644. $y^3 = px^2$ вокруг Ox при $0 < y < a$.

645. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b$; вокруг Ox. (Удлиненный эллипсоид.)

646. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b$; около Oy. (Сплюснутый эллипсоид.)

647. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ около Oy при $-h < y < h$.

648. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ около Ox при $a < x < m = \lambda a$.

649. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ (циклоида) вокруг Ox при $0 < x < 2\pi a$.

650. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ около прямой $x = \pi a$ при $0 < t < \pi$.

651. $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ около Ox.

652. $x = a\ln\frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$ (трактриса) около Ox.

653. Кардиоиды $r = a(1 + \cos\varphi)$ около полярной оси.

654. Лемнискаты $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ около Ox.

655. Лемнискаты $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ около Oy.

656. Лемнискаты $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ около прямой $y = x$.

657. Одной арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$; $y = a(1 - \cos t)$ около прямой $y = ka$, причем $0 < k < 2$.

При каком значении k, эта поверхность будет иметь наименьшую величину и какова она?

658. Дуга параболы $y^2 = 2px$, отсекаемая от нее прямой $y = 2x$, вращается вокруг оси Oy. Определить поверхность.

659. Та же дуга что и в предыдущей задаче вращается вокруг своей хорды. Определить поверхность.

660. Улитка Паскаля $r = a + b\cos\varphi$ вращается вокруг полярной оси. Определить площадь полученной поверхности, если:

1) $a > b$, 2) $a < b$.

661. Дуга астроиды $x = a\cos^3 t$; $y = a\sin^3 t$, лежащая в первой четверти, вращается около своей хорды. Определить поверхность.

662. Дуга окружности радиуса a, соответствующая центральному углу 2α, вращается вокруг оси, пересекающей ее и параллельной ее хорде. Определить площадь полученной поверхности вращения, если ось вращения отсекает дугу, соответствующую центральному углу 2β. При каком β получается минимальная площадь и какова она?

663. Астроида $x = a\cos^3 t$; $y = a\sin^3 t$ вращается вокруг прямой $y = x$. Определить полную поверхность.

664. Определить поверхность тела задачи 637.

665. Определить поверхность тела задачи 638.

666. Куб вращается вокруг своей пространственной диагонали. Определить площадь поверхности, описанной всеми ребрами куба.

ОТДЕЛ ДЕВЯТЫЙ

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ИНТЕГРАЛЫ ПО ЛИНИЯМ И ПОВЕРХНОСТЯМ

§ 1. Введение

667. Определить пределы интегрирования в интеграле

$$\iint\limits_S f(x, y)\,dx\,dy,$$

где S — круг $x^2+y^2=a^2$, если выполнять интегрирование сначала по x, а потом по y.

668. Тот же вопрос, что и в предыдущей задаче, для площади S, ограниченной прямыми $x=0$, $y=0$, $x+y=a$.

669. В интеграле $\iint\limits_S f(x, y)\,dx\,dy$ площадь S ограничена прямыми $x=y$, $y=0$, $x+y=2$. Определить пределы интегрирования, если внутреннее интегрирование совершается по x, а также, если оно совершается по y.

Определить в интеграле $\iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy$ пределы интегрирования, если:

670. S — параллелограмм со сторонами $y=0$; $y=a$; $y=x$; $y=x-2a$. Рассмотреть оба возможных порядка интегрирования.

671. S — площадь, ограниченная прямыми $y=h$; $ay=hx$; $ay=4ah-hx$; $a>0$; $h>0$.

672. S — область между прямой $y=x-2$ и параболой $y^2=x$ (оба способа).

673. S — параллелограмм со сторонами $y=x$; $y=x+a$; $y=2x$; $y=2x-a$ (оба способа).

674. S — область определяется так:

$$x^2-y^2\leqslant a^2;\quad x^2+y^2\leqslant 3a^2.$$

Переменить порядок интегрирования в следующих интегралах:

675. $\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^x f(x, y)\,dy\right)dx.$ **676.** $\int\limits_0^2 dx\int\limits_{-\sqrt{1-(x-1)^2}}^0 f(x, y)\,dy.$

677. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y)\, dy$. **678.** $\int\limits_0^a dx \int\limits_{\frac{a^2-x^2}{2a}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y)\, dy$.

679. $\int\limits_0^{2a} \int\limits_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x, y)\, dy\, dx$.

680. $\int\limits_0^2 \int\limits_{5-\sqrt{25-x^2}}^{x} f(x, y)\, dy\, dx + \int\limits_2^4 \int\limits_{5-\sqrt{25-x^2}}^{2} f(x, y)\, dy\, dx$

(и объединить).

Переменить порядок интегрирования, а также перейти к полярным координатам.

681. $\int\limits_0^a \int\limits_{a-y}^{\sqrt{a^2-ay}} f(x, y)\, dx\, dy$. **682.** $\int\limits_a^{2a} \int\limits_{2a-y}^{\sqrt{2ay-y^2}} f(x, y)\, dx\, dy$.

Определить пределы интегрирования в двойном интеграле $\iint\limits_{(S)} f(x, y)\, ds$ в декартовых и полярных координатах, если область определяется так:

683. $x^2+y^2 \leqslant 4x;\ y \geqslant x$.
684. $x^2+y^2 \leqslant a^2;\ x+y \geqslant a$.
685. $x \geqslant y;\ x+y \leqslant 2a;\ y \geqslant 0$.
686. $y^2 \leqslant 2px+p^2;\ y \geqslant x$.
687. $x^2+y^2 \geqslant 2a^2;\ x^2+y^2 \leqslant 2ax$.

Ввести вместо x и y новые переменные и определить пределы интегрирования по новым переменным для следующих интегралов:

688. $\int\limits_0^a \int\limits_{\alpha x}^{\beta x} f(x, y)\, dx\, dy$, если $u=x+y,\ uv=y$.

689. $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^b f(x, y)\, dy$, если $u=y+\alpha x,\ uv=y$.

690. $\iint\limits_S f(x, y)\, dx\, dy$, если $x=r\cos^3\varphi,\ y=r\sin^3\varphi$, а площадь S ограничена астроидой $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

691. В интеграле $\iint\limits_S f(x, y)\, dx\, dy$ площадь S ограничена прямыми $y=\alpha x,\ y=\beta x,\ x=a$. Таким образом, область интегрирования треугольник. Подходящей заменой переменных обратить область интегрирования в прямоугольник.

692. В интеграле $\iint\limits_S f(x, y)\,dx\,dy$ область интегрирования — четверть круга: $x^2+y^2=a^2$, $x>0$, $y>0$. Заменой переменных превратить ее в прямоугольник.

693. В том же интеграле обратить область интегрирования в равнобедренный прямоугольный треугольник.

Вычислить двойные интегралы от данных функций по данной области:

694. $\iint\limits_S (x+y)\,dx\,dy$. Границы области S: $x=0$, $y=0$, $x+y=2$.

695. $\iint\limits_S (x^2+y^2)\,dx\,dy$. Границы области S: $y=0$, $x=y$, $x=1$.

696. $\iint\limits_S (x+y)\,dx\,dy$. Границы области S: $x=y$, $x=y^2$.

697. $\iint\limits_{|x|+|y|<1} x^2\,dx\,dy$.

698. $\iint\limits_S (x-y)\,dx\,dy$. Границы области S: $y=0$, $x=y$, $x+y=2$.

699. $\iint\limits_S xy\,dx\,dy$. Границы области S: $y^2=2x$, $x=2$.

700. Вычислить интегралы: $\int\limits_0^1 \int\limits_{\sqrt{y}}^1 \frac{1}{x} e^{-\frac{y}{x}}\,dx\,dy$,

$$\int\limits_0^a \int\limits_x^a e^{y^2}\,dy\,dx,$$

предварительно изменив порядок интегрирования.

§ 2. Вычисление площадей

Пользуясь очевидной формулой $S=\iint\limits_S dx\,dy$, вычислить площади, ограниченные следующими кривыми:

701. $y=x^2$, $x=y^2$.

702. $y=2x-x^2$, $y=x^2$.

703. $2y=x^2$, $x=y$.

704. $4y=x^2-4x$, $x-y-3=0$.

С помощью этой же формулы и перехода к полярным координатам вычислить площади, ограниченные кривыми:

705. Лемнискатой $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$ и окружностью $x^2+y^2=2ax$.

706. Кардиоидой $(x^2+y^2-ax)^2=a^2(x^2+y^2)$ и окружностью $x^2+y^2=ay\sqrt{3}$.

Вводя полярные координаты, вычислить площади, ограниченные следующими кривыми:

707. $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$ (лемниската).
708. $(x^2+y^2)^2=a^2x^2+b^2y^2$ (подэра эллипса).
709. $(x^2+y^2)^3=a^2(x^4+y^4)$.
710. $(x^2+y^2)^2=a^2x^2-b^2y^2$.
711. $x^3+y^3=axy$ (лист Декарта) — площадь петли.
712. $(x^2+y^2)^2=a(x^3+y^3)$.
713. $x^4+y^4=2a^2xy$.

714. Пусть $\omega(x, y)$, $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ — однородные функции степеней n, $n-2$, $n-2$, одновременно обращающиеся в нуль лишь при $x=0$ и $y=0$ и положительные при других значениях x и y. Обозначим через $S(a, b)$ площадь кривой

$$\omega(x, y)=a\varphi(x, y)+b\psi(x, y),\quad a\geqslant 0,\quad b\geqslant 0.$$

Доказать, что $S(a+\alpha, b+\beta)=S(a, b)+S(\alpha, \beta)$.

715. В частности, если $\omega(x, y)=(x^2+y^2)^2$, $\varphi(x, y)=x^2$, $\psi(x, y)=y^2$, то $S(a, b)=S(b, a)$. Получить отсюда, что $S(a, b)=\frac{\pi}{2}(a^2+b^2)$ (см. задачу 714).

В дальнейших задачах полезно применять обобщенные полярные координаты, полагая $x=ar\cos^\sigma\varphi$, $y=br\sin^\sigma\varphi$, где a, b и σ — соответственно выбранные постоянные. При этом якобиан J удобно вычислять по формуле $J=J_1J_2$, где J_1 — якобиан подстановки $x=a\xi$, $y=b\eta$, равный ab, а J_2 — якобиан подстановки $\xi=r\cos^\sigma\varphi$, $\eta=r\sin^\sigma\varphi$, равный величине $\sigma r\cos^{\sigma-1}\varphi\sin^{\sigma-1}\varphi$.

Найти площади, ограниченные кривыми:

716. $\frac{x^4}{a^4}+\frac{y^4}{b^4}=\frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{k^2}$.

717. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2=\frac{x}{a}-\frac{y}{b}$; $y>0$.

718. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^3=\frac{x^2}{h^2}$; $y>0$; $a>0$, $b>0$.

719. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^3=\frac{xy}{c^2}$ (площадь петли).

720. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^4=\frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{k^2}$; $x>0$, $y>0$.

721. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^4=\frac{x^2}{h^2}-\frac{y^2}{k^2}$; $x>0$, $y>0$.

722. $\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^6=\frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{k^2}$.

723. $\left(\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}\right)^8=\frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{k^2}$; $x>0$, $y>0$.

724. $\left(\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}\right)^{12}=\frac{xy}{c^2}$ (площадь петли).

В следующих задачах границы площади заданы уравнениями такого вида: $\varphi(x, y, a)=0$, $\varphi(x, y, b)=0$, $\psi(x, y, \alpha)=0$, $\psi(x, y, \beta)=0$. В них удобно выразить x и y через новые переменные u и v из уравнений: $\varphi(x, y, u)=0$, $\psi(x, y, v)=0$. Найдя якобиан J, можем вычислить S по формуле:

$$S=\iint\limits_S dx\,dy=\int\limits_a^b du\int\limits_\alpha^\beta |J|\,dv.$$

Найти площади, ограниченные кривыми:

725. $x+y=a$, $x+y=b$, $y=\alpha x$, $y=\beta x$; $a<b$, $\alpha<\beta$.

726. $x^2=ay$, $x^2=by$, $y=m$, $y=n$; $a<b$, $m<n$.

727. $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=1$, $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=2$, $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$, $\frac{x}{a}=9\frac{y}{b}$; $x>0$, $y>0$.

728. $xy=a^2$, $xy=b^2$, $y=m$, $y=n$; $a^2>b^2$, $m>n$.

729. $y^2=mx$, $y^2=nx$, $x=\alpha y$, $x=\beta y$; $m>n$, $\alpha>\beta$.

730. $xy=a^2$, $xy=b^2$, $x=\alpha y$, $x=\beta y$; $x>0$, $y>0$, $a>b$, $m>n$.

731. $y^2=ax$, $y^2=bx$, $x^2=my$, $x^2=ny$; $a>b$, $m>n$.

732. $xy=a^2$, $xy=b^2$, $y^2=mx$, $y^2=nx$; $a^2>b^2$, $m>n$.

733. $y^2=a^2-2ax$, $y^2=b^2-2bx$, $y^2=m^2+2mx$, $y^2=n^2+2nx$; $y>0$, $a>b$, $m>n$.

734. $\frac{x^2}{\operatorname{ch}^2 u_0}+\frac{y^2}{\operatorname{sh}^2 u_0}=c^2$, $\frac{x^2}{\operatorname{ch}^2 u_1}+\frac{y^2}{\operatorname{sh}^2 u_1}=c^2$; $u_1>u_0$, $x>0$; $\frac{x^2}{\cos^2 v_0}-\frac{y^2}{\sin^2 v_0}=c^2$, $\frac{x^2}{\cos^2 v_1}-\frac{y^2}{\sin^2 v_1}=c^2$; $v_1>v_0$, $y>0$.

Замечание. Кривые, ограничивающие область, — софокусные эллипсы и гиперболы, пересекающиеся под прямым углом. Здесь полезно ввести эллиптические координаты u и v, положив

$$x=c\operatorname{ch}u\cos v,\quad y=c\operatorname{sh}u\sin v.$$

735. Найти площадь, ограниченную эллипсом

$$(ax+by+c)^2+(a_1x+b_1y+c_1)^2=h^2;\quad ab_1-a_1b\neq 0.$$

736. Найти площадь, ограниченную линией

$$|ax+by+c|+|a_1x+b_1y+c_1|=h;\quad ab_1-a_1b\neq 0.$$

§ 3. Вычисление объемов

Найти объемы, ограниченные следующими поверхностями:

737. $x+y+z=6;\ x=0;\ z=0;\ x+2y=4.$
738. $x-y+z=6,\ x+y=2,\ x=y,\ y=0,\ z=0.$
739. $x+y+z=6,\ x=y,\ y=0,\ x=3,\ z=0.$
740. $z=a+x,\ z=-x-a,\ x^2+y^2=a^2.$
741. $z^2=xy,\ x=a,\ y=b,\ z=0.$
742. $x+y+z=a,\ 3x+y=a,\ 3x+2y=2a,\ y=0,\ z=0.$
743. $x+y+z=a,\ x^2+y^2=b^2,\ z=0,\ a>b\sqrt{2}.$
744. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ y=\frac{b}{a}x,\ y=0,\ z=0;\ x>0.$
745. $x^2z^2+a^2y^2=c^2x^2,\ 0<x<a.$
746. $y^2+z^2=x,\ x=y;\ z>0.$
747. $z=x^2+y^2,\ y=x^2;\ 0<y<1,\ z=0.$
748. $z=\cos x\cos y;\ |x+y|<\frac{\pi}{2};\ z=0.$
749. $z=\sin(x^2+y^2),\ z=0;\ n\pi<x^2+y^2<(n+1)\pi.$
750. $x^2+y^2=cz,\ x^2+y^2=ax,\ z=0.$
751. $x^2+y^2=2ax,\ z=\alpha x,\ z=\beta x;\ \alpha<\beta.$
752. $x^2+y^2=az^2,\ x^2+y^2=ax;\ z>0.$
753. $x^2+y^2=az,\ x+z=2a.$
754. $cz=xy,\ x^2+y^2=ax,\ z=0;\ y>0.$
755. $z=x^2+y^2,\ z=x+y.$

756. Доказать, что объем, ограниченный плоскостью $z=mx+ny+p$ и параболоидом $z=x^2+y^2$, равен половине площади круга $x^2+y^2=mx+ny+p$, умноженной на разность величин x^2+y^2 и $mx+ny+p$, взятую в центре этого круга.

757. Доказать, что объем сегмента, отсекаемого плоскостью от эллиптического параболоида, равен площади основания сегмента, умноженной на половину высоты сегмента.

758. От кругового конуса с радиусом основания R и высотой H отсечена часть плоскостью, параллельной оси конуса. Определить объем отсеченной части, если сегмент в основании соответствует центральному углу 2α.

759. Правильная призма с квадратным основанием (со стороной a) и высотой H пересекается круговым конусом так, что след его на одном основании есть вписанная в основание окружность, а на другом основании — описанная около него окружность. Какая часть объема призмы лежит вне конуса?

760. Правильная шестигранная призма (гайка) с шириной грани a пересекается соосной конической поверхностью, образующая которой составляет с осью угол $\alpha = 60°$. Определить объем между боковой поверхностью призмы, ее основанием и конусом, если конус пересекается с основанием по окружности, вписанной в основание.

В следующих задачах, как и в некоторых из предыдущих, полезно вводить полярные координаты.

Найти объемы, ограниченные поверхностями:

761. $x^2+y^2=cz,\ x^4+y^4=a^2(x^2+y^2),\ z=0.$

762. $z^2=2xy,\ (x^2+y^2)^2=2a^2xy,\ z=0;\ x>0,\ y>0.$

763. $x^2+y^2+z^2=a^2,\ (x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2).$

764. $x^2+y^2+z^2=a^2;\ x^2+y^2>|ax|$. (Задача Вивиани).

765. $z=x^2+y^2,\ z^2=xy;\ x>0,\ y>0.$

766. $z(x+y)=ax+by,\ z=0;\ 1<x^2+y^2<4,\ x>0,\ y>0,\ a>0,\ b>0.$

767. Доказать, что объем тела, ограниченного поверхностями: $z=0,\ x^2+y^2=c^2,\ z[\varphi(x)+\varphi(y)]=a\varphi(x)+b\varphi(y)$, где $\varphi(x)$ — любая положительная интегрируемая функция, $a>0$ и $b>0$ равен $\frac{1}{2}\pi c^2(a+b)$.

768. Доказать, что объем, ограниченный поверхностями $z=0$ и $z=e^{-x^2-y^2}$, равен π.

769. Линейной заменой переменных найти величину объема, заключенного между поверхностями $z=0$ и $z=Ae^{-(ax^2+bxy+cy^2)}$, где $a>0,\ b^2-4ac<0$.

При решении дальнейших задач полезно вводить обобщенные полярные координаты по формулам:

$$x=ar\cos^\sigma\varphi,\quad y=br\sin^\sigma\varphi,\ \text{тогда}\ J=ab\sigma r\cos^{\sigma-1}\varphi\sin^{\sigma-1}\varphi.$$

Найти объемы, ограниченные поверхностями:

770. $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ z=0.$

771. $cz=xy,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ z=0;\ x>0,\ y>0.$

772. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2+\frac{z^2}{c^2}=1.$

773. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^k+\frac{z}{c}=1;\ z>0,\ k>0.$

774. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2},\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x}{h};\ z>0.$

775. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$, $\frac{x^4}{a^4}+\frac{y^4}{b^4}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$, $z=0$.

776. $z^2=2xy$, $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{2xy}{c^2}$; $x>0$, $y>0$, $z>0$.

777. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$, $\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=2$.

778. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\frac{z^2}{c^2}=1$; $x>0$, $y>0$, $z>0$.

779. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^4+\frac{z^2}{c^2}=1$; $x>0$, $y>0$, $z>0$.

780. $z=x\sqrt{x}+y\sqrt{y}$, $x+y=1$; $x>0$, $y>0$, $z>0$.

781. $z^2=xy$, $x+y=1$; $z>0$.

782. $cz=xy$, $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^4=\frac{xy}{ab}$; $x>0$, $y>0$, $z>0$.

783. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\frac{z^2}{c^2}=1$, $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2=\frac{x}{a}$; $y>0$, $z>0$.

784. $\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^3+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$.

785. $\left(\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}\right)^8+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$; $x>0$, $y>0$, $z>0$.

786. $\left(\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}\right)^4+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$; $x>0$, $y>0$, $z>0$.

Следующие задачи по способу решения близки к задачам 725—734 этого же отдела.

Найти объемы, ограниченные поверхностями:

787. $z=ye^{-\frac{xy}{a^2}}$, $xy=a^2$, $xy=2a^2$, $y=m$, $y=n$, $z=0$.
788. $cz=xy$, $y^2=mx$, $y^2=nx$, $x=\alpha y$, $x=\beta y$, $z=0$.
789. $z^2=xy$, $xy=a^2$, $xy=4a^2$, $x=2y$, $x=3y$, $z=0$.
790. $cz=xy$, $y^2=2x$, $y^2=3x$, $x^2=y$, $x^2=2y$, $z=0$.
791. $z^2=xy$, $xy=1$, $xy=4$, $y^2=x$, $y^2=3x$, $z=0$.
792. $z=x^2y$, $y^2=a^2-2ax$, $y^2=m^2+2mx$, $y=0$, $z=0$.

§ 4. Вычисление поверхностей

Величина поверхности, заданной уравнением $F(x, y, z)=0$, выражается интегралом

$$\iint\limits_{(S)}\frac{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}{\left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|}\,dx\,dy,$$

где площадь S есть проекция искомой части поверхности на плоскость xOy. Если поверхность задана параметрическими уравнениями $x=\varphi(u, v)$,

$y=\psi(u, v)$, $z=\omega(u, v)$, а элемент длины дуги ds кривой, лежащей на поверхности, выражается формулой

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

где

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \quad G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

$$F=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v},$$

то величина поверхности представляется интегралом

$$\iint \sqrt{EG-F^2}\,du\,dv,$$

распространенным на области значений u и v, соответствующих точкам изучаемой части поверхности.

Найти величины поверхностей, указанных в следующих задачах.

793. $z^2=2xy$ при $z>0$, $0<x<a$, $0<y<b$.

794. $x^2=2pz$ при $\alpha x>y>\beta x$, $0<x<a$.

795. Части поверхности $z^2=2px$, вырезанной поверхностями $y^2=2qx$, $x=a$.

796. Части цилиндра $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$, заключенной внутри цилиндра $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{c^2}=1$; $a>b$.

797. Части шара $x^2+y^2+z^2=a^2$, заключенной внутри цилиндра $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; $a>b$.

798. Части шара $x^2+y^2+z^2=a^2$, расположенной вне цилиндров $x^2+y^2=\pm ax$. (Задача Вивиани.)

799. Части цилиндров $x^2+y^2=\pm ax$, расположенной внутри шара $x^2+y^2+z^2=a^2$.

800. Части конуса $y^2+z^2=x^2$, расположенной внутри цилиндра $x^2+y^2=a^2$.

801. Части того же конуса, вырезанной поверхностью $x^2=ay$.

802. Части поверхности $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, проекция которой на плоскость xOy ограничена первым витком спирали Архимеда $r=\varphi$ и осью Ox.

803. Поверхности $2cz=y^2-x^2+2xy\operatorname{ctg}\alpha$ при условиях $z\geqslant 0$; $x^2+y^2<a^2$.

804. $x^2+y^2=2az$ внутри цилиндра $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$.

805. $az=xy$ внутри цилиндра $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$.

806. $x^2+y^2+z^2=a^2$ внутри цилиндра $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$.

807. $x^2+y^2=z^2$ внутри цилиндра $(x^2+y^2)^2=2xy$ при $z\geqslant 0$.

808. $(x\cos\alpha+y\sin\alpha)^2+z^2=a^2$ при $x>0$, $y>0$, $z>0$.

809. $(x+y)^2+z=1$ при $x>0$, $y>0$, $z>0$.

810. $(x+y)^2+2z^2=2a^2$ при $x>0,\ y>0,\ z>0$.

811. $(x^2+y^2)z=x+y$ при $1<x^2+y^2<4,\ x>0,\ y>0$.

812. $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=2z$ внутри цилиндра $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

813. $\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{b}=2z$ внутри цилиндра $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ при $z>0$.

814. $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=2z$ внутри цилиндра $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$.

815. $x^2+y^2+z^2=a^2$ при $0<x,\ 0<y,\ x+y<a,\ z>0$.

816. $z^2=2xy$ при $0<x,\ 0<y,\ 0<z,\ \sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}<1$.

817. $\sin z=\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$ при $1<x<2$.

818. Части геликоида $x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,\ z=h\varphi$ для $0<r<a$, $0<\varphi<2\pi$.

819. Найти величину поверхности $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2+y^2)$.

820. Найти величину телесного угла, под которым виден из начала координат прямоугольник $0<y<b,\ 0<z<c,\ x=a>0$. Иными словами, найти часть поверхности шара $x^2+y^2+z^2=1$, на которую лучами из начала проектируются точки данного прямоугольника.

§ 5. Криволинейные интегралы

Если дано уравнение линии либо в виде одного уравнения $f(x, y)=0$, либо параметрически: $x=\varphi(t),\ y=\psi(t)$, то координаты переменной точки $M(x, y)$ этой кривой можно выразить через одну независимую переменную. В первом случае можно, например, выразить y через x из уравнения кривой, а во втором случае x и y уже выражены через переменную t. Криволинейный интеграл по линии AB обозначается через $\int\limits_{AB} P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy$. Для его вычисления координаты переменной точки $M(x, y)$ линии AB, равно как и дифференциалы этих координат, выражают через одну переменную. Тогда криволинейный интеграл обращается в обыкновенный определенный интеграл. Так, если на линии AB имеем равенства $x=\varphi(t),\ y=\psi(t)$, то $dx=\varphi'(t)\,dt,\ dy=\psi'(t)\,dt$. Если при этом при переходе из A в B параметр t меняется от a до b, то имеем равенство:

$$\int\limits_{AB} P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy=\int\limits_a^b [P(\varphi, \psi)\varphi'+Q(\varphi, \psi)\psi']\,dt.$$

В правой части имеем обыкновенный определенный интеграл, который вычисляется обычными приемами.

Другой тип криволинейных интегралов обозначается через $\int\limits_{AB} f(x, y)\,ds$, где s — дуга кривой AB, считаемая в определенном направлении от некоторой начальной точки. Он вычисляется подобно прежнему. При этом $ds = \pm\sqrt{dx^2 + dy^2} = \pm\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,dt$. Знак плюс или минус берется в зависимости от того, совпадает ли направление от A к B с направлением отсчета дуг на кривой, или нет.

В некоторых вопросах встречаются интегралы, которые тоже часто обозначают через $\int\limits_{AB} f(x, y)\,ds$, хотя точнее было бы их обозначать через $\int\limits_{AB} f(x, y)\,|ds|$. При вычислении этих интегралов следует считать, что $ds = +\sqrt{dx^2 + dy^2} = +\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,|dt|$. Интегралы этого типа мы будем называть криволинейными интегралами 2-го рода.

Основные свойства криволинейных интегралов выражаются равенствами

$$\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy + \int\limits_{BC} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{AC} P\,dx + Q\,dy,$$

$$\int\limits_{AB} f(x, y)\,ds + \int\limits_{BC} f(x, y)\,ds = \int\limits_{AC} f(x, y)\,ds.$$

При изменении направления пути интегрирования на обратное, величина интеграла умножается на минус единицу:

$$\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy = -\int\limits_{BA} P\,dx + Q\,dy; \qquad \int\limits_{AB} f(x, y)\,ds = -\int\limits_{BA} f(x, y)\,ds.$$

Для интегралов 2-го рода величина интеграла не меняется от перестановки пределов:

$$\int\limits_{AB} f(x, y)\,|ds| = \int\limits_{BA} f(x, y)\,|ds|.$$

Криволинейные интегралы имеют простой геометрический и физический смысл. Величина $\int\limits_{AB} P(x, y)\,dx$, где путь интегрирования AB расположен на кривой $f(x, y) = 0$, означает проекцию на плоскость xOz части цилиндрической поверхности, восставленной перпендикулярно к плоскости xOy из точек кривой $f(x, y) = 0$ над дугой ее AB. Эта часть ограничена плоскостью xOy и поверхностью $z = P(x, y)$. Таким же образом интеграл 2-го рода $\int\limits_{AB} f(x, y)\,ds$, где под ds разумеется $|ds|$, означает величину цилиндрической поверхности над дугой AB от плоскости xOy до поверхности $z = f(x, y)$. Наконец, интеграл $\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy$ означает также работу сил поля, при движении точки по линии AB, если силы, действующие на движущуюся точку, когда она приходит в точку (x, y), имеют проекциями на оси Ox и Oy величины $P(x, y)$ и $Q(x, y)$.

821. Найти величину интеграла $\int\limits_{AB} x\,dy - y\,dx$ по параболе $y = x^2$ между точками $A(0, 0)$ и $B(2, 4)$.

822. Найти интеграл $\int\limits_{AB}(x+y)\,dx+(x-y)\,dy$, если путь интегрирования — парабола $y=x^2$ между точками $(-1, 1)$, $(1, 1)$.

823. Найти интеграл $\int\limits_{AB}x^2\,ds$, где путь интегрирования — верхняя половина окружности $x^2+y^2=a^2$ между точками $A(a, 0)$ и $B(-a, 0)$.

824. Найти величину интеграла $\int\limits_{AB}x\,dy$, взятого на правой полуокружности $x^2+y^2=a^2$ между точками $A(0, -a)$ и $B(0, a)$.

825. Найти величину интеграла $\int(x^2+y^2)\,dx+(x^2-y^2)\,dy$ взятого по контуру треугольника с вершинами в точках $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(0, 1)$.

Формула Грина $\int\limits_{C}P\,dx+Q\,dy=\iint\limits_{S}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$ преобразует криволинейный интеграл, взятый по замкнутому контуру C в положительном направлении обхода, т. е. против часовой стрелки, в интеграл по площади S, ограниченной этим контуром. Из нее следует, что интеграл $\int\limits_{AB}P\,dx+Q\,dy$, взятый между точками A и B по двум разным путям AmB и AnB, имеет одну и ту же величину, если в области, заключенной между этими путями, для функций P и Q выполняется равенство: $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$.

826. Из формулы Грина получить равенство: $S=\frac{1}{2}\int\limits_{C}(x\,dy-y\,dx)$, где C — контур, охватывающий площадь S в положительном направлении.

827. Вычислить с помощью формулы задачи 826 площадь эллипса $x=a\cos t$, $y=b\sin t$.

828. Вычислить с помощью формулы задачи 826 площадь сектора гиперболы $x=a\operatorname{ch}t$, $y=b\operatorname{sh}t$, ограниченного осью Ox, дугой гиперболы до точки $M(x_0, y_0)$ и прямой OM.

829. Вычислить площадь сектора астроиды $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, ограниченного прямыми OM_1 и OM_2 из начала координат и дугой M_1M_2 астроиды.

830. Найти площадь гипоциклоиды с тремя остриями:

$$x=a(2\cos t+\cos 2t),\quad y=a(2\sin t-\sin 2t).$$

831. Найти величину криволинейного интеграла $\int\limits_{C}\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}$, взятого по замкнутому контуру C в положительном направлении.

832. Кривые $X(x, y)=0$ и $Y(x, y)=0$ имеют несколько простых точек пересечения. Вычислить величину интеграла $\frac{1}{2\pi}\int\limits_C \frac{X\,dY - Y\,dX}{X^2+Y^2}$, взятого в положительном направлении по замкнутому контуру C.

Криволинейные интегралы для пространственных кривых вычисляются подобно интегралам по плоским кривым. Если $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=\omega(t)$ — параметрическое представление кривой между точками A и B, соответствующими значениям $t=a$, $t=b$, то имеется равенство:

$$\int\limits_{AB} P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz =$$

$$= \int\limits_a^b [P(\varphi, \psi, \omega)\varphi' + Q(\varphi, \psi, \omega)\psi' + R(\varphi, \psi, \omega)\omega']\,dt.$$

Оно сводит нахождение криволинейного интеграла к вычислению определенного интеграла.

Одним из приложений криволинейных интегралов является нахождение центра тяжести (x_c, y_c, z_c) кривой. Для этого служат формулы:

$$Mx_c = \int\limits_{AB} x\mu\,ds, \quad My_c = \int\limits_{AB} y\mu\,ds, \quad Mz_c = \int\limits_{AB} z\mu\,ds, \quad M = \int\limits_{AB} \mu\,ds.$$

Здесь μ — плотность кривой в точке (x, y, z), могущая меняться от точки к точке. Последний интеграл представляет массу кривой.

833. Найти координаты центра тяжести однородной дуги окружности радиуса a при центральном угле 2φ.

834. Найти координаты центра тяжести всей дуги однородной кардиоиды $z=a(1+\cos\varphi)$.

835. Найти координаты центра тяжести одной арки однородной циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$.

836. Найти координаты центра тяжести дуги винтовой линии $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=ht$ для $0<t<m$.

837. Найти координаты центра тяжести однородной дуги кривой $x=e^{-t}\cos t$, $y=e^{-t}\sin t$, $z=e^{-t}$ для $0<t<\infty$.

§ 6. Некоторые приложения двойных интегралов в механике и сопротивлении материалов

Координаты центра тяжести пластинки находятся по формулам:

$$Mx_c = \iint\limits_S x\mu\,dx\,dy, \quad My_c = \iint\limits_S y\mu\,dx\,dy, \quad M = \iint\limits_S \mu\,dx\,dy.$$

Здесь $\mu=\mu(x, y)$ — плотность пластинки в точке (x, y). Интеграл, обозначенный через M, означает массу пластинки, а величины Mx_c и My_c представляют статические моменты пластинки относительно осей Oy и Ox.

Найти координаты центра тяжести однородных пластинок, ограниченных следующими линиями:

838. $x=0,\ y=0,\ x+y=a.$

839. $y^2=2px,\ y=0,\ x=x_0.$

840. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}};\ x>0,\ y>0.$

841. $x^2+y^2=a^2;\quad x>0,\ y>0.$

842. $x^2+y^2=a^2;\quad |y|<x \operatorname{tg}\alpha.$

843. $r^2=a^2\cos 2\varphi$ (правая петля).

844. $r=a(1+\cos\varphi).$

845. $x^3+y^3=3axy$ (петля).

846. $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t);\ 0<t<2\pi;\ y=0.$

847. $x^4+y^4=x^2y$ (правая петля).

848. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a},\ x=0,\ y=0.$

849. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^4=\frac{xy}{ab}$ (правая петля).

850. Доказать, что объем прямого цилиндра (или призмы), срезанного плоскостью, не обязательно параллельной основанию, равен площади основания, умноженной на высоту над центром тяжести основания.

851. Доказать, что объем тела, полученного при вращении площади S вокруг оси, не пересекающей S и лежащей в той же плоскости, равен площади S, умноженной на длину окружности, описанной центром тяжести площади S. (Теорема Паппуса, называемая часто теоремой Гюльдена.)

Моментом инерции площади S относительно какой-нибудь оси, лежащей в той же плоскости, называется интеграл $J=\iint\limits_S \delta^2\,dx\,dy$, где δ — расстояние переменной точки (x, y) до оси, а интеграл взят по всей площади S. В частности, моменты инерции относительно осей Ox и Oy равны интегралам $\iint\limits_S y^2\,dx\,dy$ и $\iint\limits_S x^2\,dx\,dy$. Полярным моментом площади S относительно некоторой точки называется интеграл $\iint\limits_S r^2\,dx\,dy$, где r — расстояние точки (x, y) до данной точки. В частности, полярный момент относительно начала равен $\iint\limits_S (x^2+y^2)\,dx\,dy$. Центробежным моментом называют интеграл $\iint\limits_S xy\,dx\,dy$.

852. Найти моменты инерции сектора с радиусом a и с центральным углом 2φ относительно оси симметрии и относительно перпендикуляра к ней, проходящего через центр тяжести.

853. Найти момент инерции сегмента с радиусом a и центральным углом 2φ относительно оси симметрии.

854. Может ли эллипс инерции для сектора обратиться в круг?

855. У равнобедренного треугольника основание равно a, а высота h. При каком соотношении между a и h эллипс инерции треугольника относительно центра тяжести обращается в круг?

856. Найти моменты инерции эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ относительно осей и найти уравнение эллипса инерции.

857. Кольцо между концентрическими кругами с радиусами 13 и 12 имеет ту же площадь, что и круг с радиусом 5. Во сколько раз момент инерции кольца больше, чем у круга, если оба момента берутся относительно диаметра?

858. Найти момент инерции относительно оси Ox площади параллелограмма со сторонами $a_1x+b_1y=\pm h_1$, $a_2x+b_2y=\pm h_2$.

859. Найти центробежный момент инерции для той же площади.

860. Найти момент инерции площади кривой $x^4+y^4=x^2+y^2$ относительно оси Ox и сравнить его величину с таким же моментом инерции квадрата $|x+y|+|x-y|=2$.

Жесткость при кручении стержня с односвязным поперечным сечением S измеряется величиной $C=2\mu\iint\limits_S \psi(x, y)\,dx\,dy$, где μ — модуль сдвига вещества стержня, а $\psi(x, y)$ — функция напряжений. $\psi(x, y)$ равна нулю на контуре поперечного сечения, а внутри его удовлетворяет уравнению $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=-2$.

861. Найти жесткость C для круглого сечения, когда $2\psi=a^2-x^2-y^2$.

862. Найти C для эллиптического сечения, когда $(a^2+b^2)\psi=a^2b^2-b^2x^2-a^2y^2$, где a и b — полуоси эллипса.

863. Тот же вопрос для равностороннего треугольника со сторонами $x\pm y\sqrt{3}=h$, $x=0$. В этом случае

$$2h\psi=x(h-x-y\sqrt{3})(h-x+y\sqrt{3}).$$

864. Уровень жидкости — ось Ox, а ось Oy направлена вниз. Доказать, что давление жидкости на вертикальную площадку S равно $\gamma\iint\limits_S y\,dx\,dy$, где γ — удельный вес жидкости. Доказать, что точка приложения равнодействующей сил давления лежит на глубине h, где $h\int\limits_S\int y\,dx\,dy=\int\limits_S\int y^2\,dx\,dy$.

§ 7. Интегралы по поверхности, координаты центров тяжести и моменты инерции поверхностей

Интегралом по поверхности называется интеграл вида

$$\int\limits_\sigma\int P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy.$$

При его вычислении переменные x, y и z выражают через две независимые переменные, пользуясь уравнением поверхности $f(x, y, z)=0$ или ее параметрическими уравнениями $x=\varphi(u, v)$, $y=\psi(u, v)$, $z=\omega(u, v)$. Другая, более отчетливая, запись интегралов по поверхности имеет вид:

$$\int\limits_\sigma\int (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,d\sigma,$$

где α, β, γ — углы нормали с осями координат. Если направление нормали изменить на обратное, то интеграл изменяет знак на обратный.

Примером интеграла по поверхности является момент инерции части $x>0$, $y>0$, $z>0$ поверхности шара $x^2+y^2+z^2=a^2$ относительно оси Oz, т. е. интеграл $\int\limits_\sigma\int(x^2+y^2)\,d\sigma$, взятый по данной части поверхности шара. При его вычислении можно выразить $d\sigma$ по формуле

$$d\sigma=\frac{dx\,dy}{\cos\gamma}=\frac{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}{\frac{\partial f}{\partial z}}\,dx\,dy.$$

Так как в данном случае $f(x, y, z)=x^2+y^2+z^2-a^2$, то

$$d\sigma=\frac{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}}{2z}\,dx\,dy=\frac{a\,dx\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

После этого получается равенство:

$$\int\limits_\sigma\int(x^2+y^2)\,d\sigma=a\int\limits_S\int\frac{(x^2+y^2)\,dx\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

где интеграл в правой части взят по четверти круга: $x^2+y^2=a^2$ при $x>0$, $y>0$.

В данном случае удобнее другой путь, в котором координаты точек шара выражают через полярные углы φ и θ по формулам: $x=a\sin\theta\cos\varphi$, $y=a\sin\theta\sin\varphi$, $z=a\cos\theta$. При этом $d\sigma=a^2\sin\theta\,d\varphi\,d\theta$, $x^2+y^2=a^2\sin^2\theta$ и, окончательно, имеем:

$$\int\limits_{(\sigma)}\int(x^2+y^2)\,d\sigma=a^4\int\limits_{(\sigma)}\int\sin^3\theta\,d\varphi\,d\theta=a^4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\,d\theta=\frac{\pi a^4}{3}.$$

Нахождение координат центров тяжести частей однородных поверхностей, имеющих массу, выполняется с помощью интегралов, по поверхности по формулам:

$$Sx_c = \iint\limits_S x\,ds, \quad Sy_c = \iint\limits_S y\,ds, \quad Sz_c = \iint\limits_S z\,ds; \quad S = \iint\limits_S ds.$$

Здесь S — данная часть поверхности.

865. Найти координаты центра тяжести части оболочки шара $x^2+y^2+z^2=a^2$ при $x>0$, $y>0$, $z>0$.

866. Найти координаты центра тяжести поверхности сегмента того же шара при $h<z<a$.

867. Найти координаты центра тяжести поверхности геликоида $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=hv$ при $0<u<a$, $0<v<\pi$.

868. Найти координаты центра тяжести части поверхности $3z=2(x\sqrt{x}+y\sqrt{y})$, ограниченной плоскостями $x=0$, $y=0$; $x+y=1$.

869. Найти координаты центра тяжести поверхности $x^2=2c(c-z)$, ограниченной поверхностями: $y=kx$, $y=0$, $z=0$.

870. Найти координаты центра тяжести части поверхности $x^2+y^2+z^2=a^2$, ограниченной поверхностями: $x^2+y^2=ax$, $z=0$.

871. Найти координаты центра тяжести части поверхности $x^2+y^2+z^2=a^2$, ограниченной плоскостями: $x+y=\pm a$, $x-y=\pm a$.

Найти моменты инерции следующих частей однородных поверхностей:

872. Поверхности конуса $h^2(x^2+y^2)=a^2z^2$ при $0<z<h$ относительно оси Oz.

873. Поверхности шара $x^2+y^2+z^2=a^2$ относительно диаметра.

874. Поверхности параболоида $x^2+y^2=2az$ относительно Oz при $0<z<a$.

875. Поверхности шарового сегмента $x^2+y^2+z^2=a^2$ при $h<z<a$ относительно Oz.

876. Вычислить двойной интеграл $\iint \frac{ds}{\rho}$, взятый по поверхности эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, где ρ — расстояние центра эллипсоида до плоскости, касательной к элементу ds поверхности эллипсоида.

877. Вычислить интеграл $\iint \frac{ds}{\rho^n}$, взятый по поверхности шара $x^2+y^2+z^2=a^2$, если ρ — расстояние элемента поверхности до точки $(0, 0, c)$, расположенной вне шара.

878. Показать, что интеграл $w=\iint\limits_S \frac{\cos(r, n)}{r^2}\,ds=\iint\limits_S \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\,ds$, взятый по поверхности S, равен телесному углу, под которым поверхность S видна из начала координат. Здесь r — радиус-вектор из начала координат к элементу поверхности ds; n — нормаль к поверхности, образующая с вектором r, идущим из начала, острый угол. Величина $\frac{du}{dn}$ равна

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cos(n, x)+\frac{\partial u}{\partial y}\cos(n, y)+\frac{\partial u}{\partial z}\cos(n, z).$$

§ 8. Тройной интеграл

Определить пределы интегрирования в декартовых, цилиндрических и сферических координатах в тройном интеграле

$$\iiint\limits_{(v)} f(x, y, z)\, dv,$$

взятом по объему v, заданному так:

879. $\begin{cases} x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0; \\ x+y\leqslant a \\ z\leqslant h. \end{cases}$

880. $\begin{cases} x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0; \\ x+y+z\leqslant a. \end{cases}$

881. $\begin{cases} x^2+y^2+z^2\leqslant a^2; \\ x^2+y^2\leqslant z^2\operatorname{tg}^2\alpha. \end{cases}$

882. $\begin{cases} x^2+y^2\leqslant z^2; \\ x^2+y^2+z^2\leqslant az. \end{cases}$

883. $\begin{cases} x^2+y^2\geqslant z^2; \\ x^2+y^2+z^2\leqslant az. \end{cases}$

884. $\begin{cases} x^2+y^2\leqslant a^2; \\ x+z\leqslant a; \\ z\geqslant 0. \end{cases}$

885. $\begin{cases} x^2+y^2\leqslant z^2; \\ x^2+z^2\leqslant a^2; \\ z\geqslant 0. \end{cases}$

§ 9. Вычисление объемов

В следующих задачах требуется найти объем тела, ограниченного данной поверхностью. Основным методом их решения является введение соответствующих новых переменных, упрощающих интегрирование. Так, например, если нужно найти объем, ограниченный поверхностями

$$x^2+y^2+z^2=2az,\quad x^2+y^2=z^2\operatorname{tg}^2\alpha,\quad x^2+y^2=z^2\operatorname{tg}^2\beta,$$

где $\alpha<\beta$, то следует ввести сферические координаты по формулам:

$$x=r\sin\theta\cos\varphi,\quad y=r\sin\theta\sin\varphi,\quad z=r\cos\theta.$$

При этом якобиан удобно вычисляется по формуле: $J=J_1J_2$, где J_1 — якобиан преобразования $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $z=z$, равный ρ, а J_2 — якобиан преобразования $\rho=r\sin\theta$, $z=r\cos\theta$, $\varphi=\varphi$, равный r. Таким образом, $J=\rho r=r^2\sin\theta$.

В прежних переменных область изменения характеризовалась неравенствами: $x^2+y^2+z^2<2az$, $z^2\operatorname{tg}^2\alpha<x^2+y^2<z^2\operatorname{tg}^2\beta$. Для новых переменных эти неравенства после упрощения переходят в такие: $r<2a\cos\theta$, $\cos^2\theta\operatorname{tg}^2\alpha<\sin^2\theta<\cos^2\theta\operatorname{tg}^2\beta$. Так как $z>0$, то и $\cos\theta>0$. Поэтому окончательно имеем неравенства:

$$r < 2a\cos\theta, \quad \operatorname{tg}\alpha < \operatorname{tg}\theta < \operatorname{tg}\beta.$$

Таким образом, при любых данных r и θ переменное φ может иметь любые значения от 0 до 2π, переменное r может при данном θ изменяться от 0 до $2a\cos\theta$, а угол θ может изменяться от α до β. В силу этого имеем для величины объема v равенства:

$$V = \int\int_V\int dx\,dy\,dz = \int\int_{(V)}\int J\,dr\,d\varphi\,d\theta = \int_\alpha^\beta \sin\theta\,d\theta \int_0^{2a\cos\theta} r^2\,dr \int_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$= 2\pi\int_\alpha^\beta \sin\theta\,d\theta\cdot\frac{r^3}{3}\Bigg|_0^{2a\cos\theta} = \frac{16\pi a^3}{3}\int_\alpha^\beta \cos^3\theta\sin\theta\,d\theta =$$

$$= \frac{16\pi a^3}{3}\cdot\frac{-\cos^4\theta}{4}\Bigg|_\alpha^\beta = \frac{4}{3}\pi a^3(\cos^4\alpha - \cos^4\beta).$$

В следующих задачах решение удобно получается введением сферических координат.

Найти объемы, ограниченные поверхностями:

886. $(x^2+y^2+z^2)^2 = a^3x$. **887.** $(x^2+y^2+z^2)^2 = axyz$.
888. $(x^2+y^2+z^2)^2 = az(x^2+y^2)$.
889. $(x^2+y^2+z^2)^2 = a^2(x^2+y^2)$.
890. $(x^2+y^2+z^2)^2 = a^2(x^2+y^2-z^2)$.
891. $(x^2+y^2+z^2)^3 = a^2y^2z^2$. **892.** $(x^2+y^2+z^2)^3 = a^3xyz$.
893. $(x^2+y^2+z^2)^3 = a^3(x^3+y^3+z^3)$; $x>0,\ y>0,\ z>0$.
894. $(x^2+y^2+z^2)^5 = (a^3x^2+b^3y^2+c^3z^2)^2$.
895. $(x^2+y^2+z^2)^2 = a^3ze^{-\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2}}$.
896. $(x^2+y^2)^2+z^4 = a^3(x-y)$.
897. $(x^2+y^2)^2+z^4 = a^3z$. **898.** $(x^2+y^2)^3+z^6 = a^3xyz$.
899. $(x^2+y^2+z^2)^3 = \frac{a^6z^2}{x^2+y^2}$. **900.** $(x^2+y^2+z^2)^2 = \frac{a^6}{x^2+y^2}$.

В следующих задачах удобно вводить обобщенные сферические координаты по формулам:

$$x = ar\sin\theta\cos\varphi, \quad y = br\sin\theta\sin\varphi, \quad z = cr\cos\theta; \quad J = abcr^2\sin\theta.$$

Найти объемы, ограниченные поверхностями:

901. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{x}{h}$. **902.** $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{xyz}{h^3}$.
903. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^3 = \frac{z^4}{h^4}$. **904.** $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^3 = \frac{xyz}{h^3}$.
905. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+\alpha^2\right)^2 = 4\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)$; $\alpha^2<1$.

906. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{z}{h}\,e^{-\frac{\frac{z^2}{c^2}}{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}}$.

907. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2+\frac{z^4}{c^4}=\frac{z}{k}$. **908.** $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^3+\frac{z^6}{c^6}=\frac{xyz}{h^3}$.

В дальнейших задачах объем находится путем введения обобщенных сферических координат по формулам:

$$x=ar\sin^\sigma\theta\cos^\sigma\varphi,\quad y=br\sin^\sigma\theta\sin^\sigma\varphi,\quad z=cr\cos^\sigma\theta.$$

Якобиан в этом случае лучше всего вычислять по формуле $J=J_1J_2J_3$, где J_1J_2 и J_3 — якобианы подстановок:

$x=a\xi^\sigma$, $y=b\eta^\sigma$, $z=c\zeta^\sigma$: $\xi=\rho\sin\theta\cos\varphi$, $\eta=\rho\sin\theta\sin\varphi$, $\zeta=\rho\cos\theta$;

$\rho=r^{\frac{1}{\sigma}}$, $\theta=\theta$, $\varphi=\varphi$.

Таким образом:

$$J=abc\,\sigma^2r^2\sin^{2\sigma-1}\theta\,(\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi)^{\sigma-1}.$$

909. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2=\frac{z}{l}$; $x>0,\ y>0,\ z>0$.

910. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2=\frac{x}{h}+\frac{y}{k}$; $x>0,\ y>0,\ z>0$.

911. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2=\frac{x}{h}-\frac{y}{k}$; $x>0,\ y>0,\ z>0$.

912. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-\frac{z}{h}$; $x>0,\ y>0,\ z>0$.

913. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^6=\frac{xyz}{h^3}$; $x>0,\ y>0,\ z>0$.

914. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\frac{z^2}{c^2}=\frac{x}{h}+\frac{y}{k}$; $x>0,\ y>0,\ z>0$.

915. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\frac{z^2}{c^2}=\frac{x}{h}-\frac{y}{k}$; $x>0,\ y>0,\ z>0$.

916. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^3=\ln\frac{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}}{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}}$; $x>0,\ y>0,\ z>0$.

917. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^3=\sin\frac{\pi\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)}{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}}$; $x>0,\ y>0,\ z>0$.

918. $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}}=1$.

919. $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}+\sqrt{\frac{z}{c}}=1$; $x>0,\ y>0,\ z>0$.

920. $\sqrt[3]{\frac{x}{a}}+\sqrt[3]{\frac{y}{b}}+\sqrt[3]{\frac{z}{c}}=1;\ x>0,\ y>0,\ z>0.$

С помощью замены переменных найти объемы тел, ограниченных поверхностями:

921. $x+y+z=a,\quad x+y+z=2a,\quad x+y=z,\quad x+y=2z,$ $y=x,\ y=3x.$

922. $a_1x+b_1y+c_1z=\pm h_1,\ a_2x+b_2y+c_2z=\pm h_2,\ a_3x+b_3y+$ $+c_3z=\pm h_3.$

923. $(a_1x+b_1y+c_1z)^2+(a_2x+b_2y+c_2z)^2+(a_3x+b_3y+c_3z)^2=1.$

924. $(a_1x+b_1y+c_1z)^2+(a_2x+b_2y+c_2z)^2=1,\ a_3x+b_3y+c_3z=\pm h.$

925. $|a_1x+b_1y+c_1z|+|a_2x+b_2y+c_2z|+|a_3x+b_3y+c_3z|=1.$

§ 10. Координаты центров тяжести и моменты инерции тел

Координаты x_c, y_c, z_c центра тяжести тела, занимающего объем V, определяются формулами:

$$x_c=\frac{1}{m}\iiint\limits_{(V)}\rho x\,dx\,dy\,dz;\quad y_c=\frac{1}{m}\iiint\limits_{(V)}\rho y\,dx\,dy\,dz;$$

$$z_c=\frac{1}{m}\iiint\limits_{(V)}\rho z\,dx\,dy\,dz,$$

где ρ — плотность тела в точке (x, y, z), а m — масса тела.

Моментом инерции относительно некоторой оси L называется интеграл:

$$I_L=\iiint\limits_{(V)}\rho l^2\,dx\,dy\,dz,$$

где l — расстояние переменной точки тела (x, y, z) до оси L.

Моменты инерции относительно координатных осей даются формулами:

$$I_x=\iiint\limits_{(V)}\rho\,(y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz;\quad I_y=\iiint\limits_{(V)}\rho\,(z^2+x^2)\,dx\,dy\,dz;$$

$$I_z=\iiint\limits_{(V)}\rho\,(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz.$$

Центробежные моменты инерции определяются интегралами:

$$I_{xy}=\iiint\limits_{(V)}\rho\,xy\,dx\,dy\,dz;\quad I_{yz}=\iiint\limits_{(V)}\rho\,yz\,dx\,dy\,dz;$$

$$I_{zx}=\iiint\limits_{(V)}\rho\,zx\,dx\,dy\,dz.$$

В дальнейших задачах тело будет предполагаться однородным и $\rho=1$,

Найти координаты центров тяжести однородных тел, ограниченных следующими поверхностями:

926. $x+y+z=a$; $x=0$, $y=0$, $z=0$.
927. $z^2=xy$, $x=a$, $y=b$, $z=0$.
928. $abz=c(a-x)(b-y)$; $x=0$, $y=0$, $z=0$.
929. $h^2(x^2+y^2)=a^2z^2$; $0<z<h$.
930. $x^2+y^2+z^2=a^2$; $x>0$, $y>0$, $z>0$.
931. Сегмента шара $x^2+y^2+z^2=a^2$; $h<z<a$.
932. $x^2+y^2+z^2=a^2$; $x^2+y^2=ax$.
933. $x^2+y^2=z$; $x+y+z=0$.
934. $x^2+y^2+z^2=a^2$; $x^2+y^2=a(a-2z)$.
935. $x^2+y^2=2a^2$, $x+y+z=2a$; $x=0$, $y=0$, $z=0$.
936. $(x^2+y^2+z^2)^2=axyz$; $x>0$, $y>0$, $z>0$.
937. $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3z$.

938. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$; $z>0$.

939. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\pm 1$, $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\pm 1$, $z=0$.

940. $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}+\sqrt{\frac{z}{c}}=1$; $x>0$, $y>0$, $z>0$.

941. $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}}=1$; $x>0$, $y>0$, $z>0$.

Найти моменты инерции относительно оси Oz тел, ограниченных следующими поверхностями:

942. $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$, $z=0$, $z=c$.

943. $z^2=2ax$, $z=0$, $x^2+y^2=ax$.

944. $h^2(x^2+y^2)=a^2z^2$; $0<z<h$.

945. $x+y+z=a\sqrt{2}$, $x^2+y^2=a^2$, $z=0$.

946. $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3z$. **947.** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

948. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$; $x=0$, $y=0$, $z=0$.

949. $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}}=1$.

950. Найти момент инерции тора $x=(a+r\cos\theta)\cos\varphi$, $y=(a+r\cos\theta)\sin\varphi$, $z=r\sin\theta$ относительно его оси вращения.

951. Найти момент инерции того же тора относительно его экваториального диаметра.

952. Найти момент инерции эллиптического конуса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{h^2}$, $z=h$ относительно оси Ox.

953. Найти момент инерции кругового цилиндра высоты H и радиуса основания a — относительно диаметра основания.

954. Найти момент инерции кругового конуса высоты H и радиуса основания R — относительно диаметра основания.

955. Доказать, что момент инерции тела J_σ относительно оси $\frac{x}{\cos\alpha}=\frac{y}{\cos\beta}=\frac{z}{\cos\gamma}$ выражается формулой:

$$J_\sigma = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma - 2D\cos\alpha\cos\beta - 2E\cos\alpha\cos\gamma - \\ - 2F\cos\beta\cos\gamma,$$

где коэффициенты равны соответствующим моментам инерции и центробежным моментам:

$$A = J_x,\quad B = J_y,\quad C = J_z,\quad D = J_{xy},\quad E = J_{xz},\quad F = J_{yz}.$$

На каждой прямой σ, проходящей через центр тяжести тела, отложен отрезок, длиной $\frac{1}{\sqrt{J_\sigma}}$. Доказать, что концы этих отрезков лежат на эллипсоиде

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2Dxy - 2Exz - 2Fyz = 1;$$

этот эллипсоид называется эллипсоидом инерции данного тела.

956. Определить высоту h и радиус основания a однородного цилиндра так, чтобы эллипсоид инерции для этого цилиндра обратился в шар.

957. Тот же вопрос, что и в предыдущей задаче, для однородного конуса.

958. Определить высоту h прямоугольного параллелепипеда, в основании которого квадрат со стороной a, так, чтобы эллипсоид инерции для однородной массы, заполняющей этот параллелепипед, обратился в шар.

959. Доказать, что из всех однородных эллипсоидов лишь у шара эллипсоид инерции есть шар.

960. Доказать, что для однородных тел, симметричных относительно плоскости yOz, величина $J_{xy}=0$.

961. Доказать, что у однородных правильных многогранников эллипсоид инерции есть шар.

962. Доказать, что однородный эллипсоид может быть подобен своему эллипсоиду инерции лишь в том случае, когда эллипсоид есть шар.

§ 11. Интегралы теории поля и теории потенциала

Если $u(x, y, z)$ — функция точки, то поверхность $u(x, y, z)=c$ называется поверхностью уровня. Вектор, проекции которого на оси Ox, Oy и Oz равны величинам $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$, называется градиентом u и обозначается

$\operatorname{grad} u$. Он направлен по нормали к поверхности уровня, проходящей через данную точку. Его направление есть направление наискорейшего возрастания функции $u(x, y, z)$, а его величина дает скорость этого возрастания. Скорость изменения функции по направлению l, составляющему с осями углы α, β и γ, равна производной от функции по этому направлению $\frac{\partial u}{\partial l}$, где $\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial y}{\partial z}\cos\gamma$. Иными словами, $\frac{\partial u}{\partial l} = \operatorname{grad} u \cdot \cos(n, l)$, где n — нормаль к поверхности, направленная в сторону возрастания u.

Если в каждой точке пространства дан вектор $\mathbf{u}$ с проекциями u_x, u_y, u_z на оси, равными данным функциям точки, то говорят, что имеется поле векторов. Скалярная величина $\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$ называется расхождением или дивергенцией поля и обозначается $\operatorname{div}\mathbf{u}$. Вектор с проекциями на оси Ox, Oy и Oz, равными величинам $\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}$, $\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}$, $\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}$, называется ротором или вихрем поля векторов $\mathbf{u}$ и обозначается $\operatorname{rot}\mathbf{u}$. Вводя символический вектор Гамильтона „набла“ ∇ с проекциями $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$, можно записать $\operatorname{div}\mathbf{u}$ и $\operatorname{rot}\mathbf{u}$ в виде скалярного и векторного произведений: $\operatorname{div}\mathbf{u} = \nabla\cdot\mathbf{u}$, $\operatorname{rot}\mathbf{u} = \nabla\times\mathbf{u}$. Если дана поверхность σ, а u_n — проекция вектора на нормаль к ней, идущую в определенную сторону этой поверхности, то потоком вектора сквозь поверхность называют интеграл по поверхности $\iint\limits_{\sigma} u_n\,d\sigma$ или, в векторной форме, $\iint\limits_{\sigma} \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$. Если вектор $\mathbf{u}$ представляет скорость жидкости в установившемся движении, то поток вектора $\mathbf{u}$ сквозь поверхность дает объем жидкости протекающей сквозь поверхность за единицу времени. Другим важным понятием в теории поля является циркуляция вектора $\mathbf{u}$ по данной линии L. Она представляется криволинейным интегралом $\int\limits_L \mathbf{u}\cdot d\mathbf{r}$, где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор из начала координат. Выражая циркуляцию через проекции вектора $\mathbf{u}$, можем написать: $\int\limits_L \mathbf{u}\,d\mathbf{r} = \int\limits_L u_x\,dx + u_y\,dy + u_z\,dz$.

Проверить, что:

963. $\operatorname{grad}(x^2+y^2+z^2) = 2\mathbf{r}$.

964. $\operatorname{grad}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}$.

965. $\operatorname{div}\operatorname{grad}(x^2+y^2+z^2) = 6$.

966. $\operatorname{div}\frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0$.

967. Доказать, что если $u_x = -\frac{ay}{x^2+y^2}$, $u_y = \frac{ax}{x^2+y^2}$, $u_z = 0$, то циркуляция $\mathbf{u}$ по замкнутой кривой равна нулю, если кривая не обходит ось Oz. Она равна $2\pi n$, если кривая n раз обходит ось Oz так, что ее проекция на плоскость xOy обходит начало координат против часовой стрелки n раз.

968. Доказать, что у вектора предыдущей задачи $\operatorname{rot}\mathbf{u}=0$ во всех точках, кроме точек оси Oz.

969. Среда совершает вращение, как твердое тело, вокруг оси Oz с угловой скоростью ω. Вектор скорости $\mathbf{v}$ имеет проекции на оси $v_x=-\omega y$, $v_y=\omega x$, $v_z=0$. Найти $\operatorname{rot}\mathbf{v}$.

970. Найти циркуляцию предыдущего вектора по окружности $x^2+y^2=a^2$ в положительном направлении.

971. Найти циркуляцию того же вектора по окружности $(x-2)^2+y^2=2$.

Особую важность в теории поля имеют две формулы:

I. Формула Остроградского-Гаусса:

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv=\iint\limits_\sigma [(P\cos(x,\mathbf{n})+Q\cos(y,\mathbf{n})+R\cos(z,\mathbf{n})]\,d\sigma.$$

Здесь V — объем, σ — поверхность, ограничивающая его, а $\mathbf{n}$ — единичный вектор, направленный по внешней нормали, P, Q, R — проекции u_x, u_y, u_z вектора поля $\mathbf{u}$ на оси Ox, Oy, Oz. В векторной форме та же формула имеет сжатый вид:

$$\iiint\limits_V \operatorname{div}\mathbf{u}\,dv=\iint\limits_\sigma \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma=\iint\limits_\sigma u_n\,d\sigma.$$

Таким образом, интеграл от дивергенции вектора по объему равен потоку вектора сквозь поверхность этого объема.

II. Формула Стокса. Если P, Q, R — функции точки, имеющие частные производные в области, в которой расположена поверхность σ, а L — контур, ограничивающий эту поверхность, то

$$\int\limits_L P\,dx+Q\,dy+R\,dz=$$

$$=\iint\limits_\sigma \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]d\sigma,$$

где α, β, γ — косинусы углов нормали с осями. В векторной форме эту формулу можно записать короче. Если P, Q, R — проекции вектора $\mathbf{u}$ на оси, то формула Стокса принимает вид:

$$\int\limits_L \mathbf{u}\cdot d\mathbf{r}=\iint\limits_\sigma \operatorname{rot}\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma=\iint\limits_\sigma \operatorname{rot}_n\mathbf{u}\,d\sigma,$$

т. е. циркуляция вектора по замкнутому контуру равна потоку вихря вектора сквозь поверхность, ограниченную контуром. Направление обхода контура L при интегрировании и направление нормали $\mathbf{n}$ в формуле Стокса должны быть выбраны согласованно. Для этого следует вообразить наблюдателя, стоящего головой по направлению нормали к поверхности σ, расположенной вблизи от участка контура L. Движение точки по контуру L в направлении интегрирования должно казаться ему направленным в ту же сторону, как и движение от оси Ox к оси Oy для наблюдателя, стоящего головой по оси Oz.

972. Доказать равенство $\iint\limits_S \cos(\mathbf{n}, x)\, d\sigma = 0$, где S — замкнутая поверхность, $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к ней.

973. Найти величину интеграла

$$\iint\limits_S (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\, ds,$$

где α, β, γ — углы внешней нормали к поверхности S, а интеграл берется по всей поверхности S некоторого тела.

974. Найти интеграл

$$\iint\limits_S (x^3\cos\alpha + y^3\cos\beta + z^3\cos\gamma)\, ds,$$

взятый по поверхности шара $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Здесь α, β, γ — углы внешней нормали с осями.

975. Найти интеграл

$$\iint\limits_S [(z^n - y^n)\cos\alpha + (x^n - z^n)\cos\beta + (y^n - x^n)\cos\gamma]\, ds,$$

взятый по верхней половине поверхности шара $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$; α, β, γ — углы внешней к шару нормали.

976. Применяя формулу Остроградского — Гаусса к вектору $u \operatorname{grad} v$, получить формулу Грина:

$$\iiint\limits_\omega \left[u\,\Delta v + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right] d\omega = -\iint\limits_\sigma u\frac{\partial v}{\partial n}\, d\sigma.$$

Здесь ω — объем; σ — его поверхность; $\frac{\partial v}{\partial n}$, равная $\frac{\partial v}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial v}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial v}{\partial z}\cos\gamma$, — производная по внутренней нормали, и

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}.$$

977. Исходя из предыдущего результата, доказать вторую формулу Грина:

$$\iiint\limits_\omega (u\,\Delta v - v\,\Delta u)\, d\omega = -\iint\limits_\sigma \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) d\sigma.$$

978. Функция u, для которой $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$, называется гармонической. Доказать, что для гармонических функций справедлива формула:

$$\iiint\limits_\omega |\operatorname{grad} u|^2\, d\omega = -\iint\limits_\sigma u\frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma.$$

979. Доказать формулу, подобную формуле Остроградского — Гаусса:

$$\iint_{\sigma}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)d\sigma=\int_{S}(u\cos\alpha+v\cos\beta)\,ds.$$

Здесь σ — площадь, а S — линия, ограничивающая ее; α и β — углы внешней нормали с осями.

980. Доказать формулу, подобную формуле Грина:

$$\iint_{\sigma}\left(u\,\Delta v+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)d\sigma=-\int_{S}u\,\frac{\partial v}{\partial n}\,ds.$$

Здесь σ — площадь, S — ее контур, n — внутренняя нормаль,

$$\Delta v=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.$$

981. Доказать равенство:

$$\iint_{\sigma}(u\,\Delta v-v\,\Delta u)\,d\sigma=-\int_{S}\left(u\,\frac{\partial v}{\partial n}-v\,\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds.$$

982. Доказать, что для гармонических функций от двух переменных справедливо равенство:

$$\iint_{\sigma}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]d\sigma=-\int_{S}u\,\frac{\partial u}{\partial n}\,ds.$$

983. Доказать для тех же функций, что и в предыдущей задаче, формулу:

$$\int_{S}\frac{\partial u}{\partial n}\,ds=0.$$

984. Доказать, что для гармонических функций от трех переменных

$$\iint_{\sigma}\frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma=0.$$

985. С помощью второй формулы Грина, примененной к области между поверхностью σ и шаром радиуса $\rho\to 0$ с центром в точке $M(\xi,\eta,\zeta)$, доказать для гармонической функции от трех переменных равенство:

$$u_M=\frac{1}{4\pi}\iint_{\sigma}u\,\frac{\cos(r,\mathbf{n})}{r^2}\,d\sigma+\frac{1}{4\pi}\iint_{\sigma}\frac{\partial u}{\partial n}\frac{d\sigma}{r},$$

где r — расстояние точки M до переменной точки поверхности, $\mathbf{n}$ — вектор внешней нормали.

986. Доказать, что

$$\iint_{\sigma} \frac{\cos(r, \mathbf{n})}{r^2}\, d\sigma = 4\pi \quad \text{или} \quad 0,$$

смотря по тому, лежит ли точка, из которой проводятся радиусы-векторы $\mathbf{r}$ до точек поверхности, внутри поверхности или вне ее. Поверхность предполагается односвязной, замкнутой и без особых точек.

987. Доказать, что для гармонических функций от двух переменных справедлива формула:

$$u_M = \frac{1}{2\pi} \int_S \left(\ln r \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \ln r}{\partial n} \right) ds,$$

где производные взяты по внутренней нормали, а точка M — внутри радиуса S.

988. Доказать равенство

$$\int_{AB} \frac{\cos(r,\ n)}{r}\, ds = \varphi,$$

где φ — угол, под которым линия AB видна из точки $(\xi,\ \eta)$, $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$, n — нормаль к линии AB.

989. Доказать, что для гармонических функций от трех переменных справедлива формула

$$u(x,\ y,\ z) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{\sigma} u\, d\sigma,$$

где σ — поверхность шара с центром в точке $(x,\ y,\ z)$. (Гаусс.)

990. Доказать для гармонических функций от двух переменных формулу

$$u(x,\ y) = \frac{1}{2\pi r} \int_S u\, ds,$$

где S — окружность с центром в точке $(x,\ y)$.

991. Доказать, что для функции $u(x,\ y,\ z)$, гармонической внутри шара объема ω, имеет место формула

$$u_c = \frac{1}{\omega} \iiint_{\omega} u\, d\omega,$$

где u_c — значение u в центре шара; а для функции $u(x,\ y)$, гармонической внутри круга площади σ, доказать формулу

$$u_c = \frac{1}{\sigma} \iint_{\sigma} u\, d\sigma,$$

где u_c — значение u в центре круга.

992. Пользуясь разложением в ряд Тэйлора, доказать равенство

$$\frac{1}{2\pi r}\int_S u\,ds = u + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}\left(\frac{r}{2}\right)^{2n}\Delta^n u,$$

где

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\quad \Delta^2 u = \Delta(\Delta u) = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\,\partial y^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}$$

и т. д., а интегрирование произведено по окружности радиуса r с центром в точке (x, y).

993. Доказать равенство:

$$\frac{1}{4\pi r^2}\int\int_\sigma u\,d\sigma = u(x, y, z) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^{2n}}{(2n+1)!}\Delta^n u,$$

где

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},\quad \Delta^2 u = \Delta(\Delta u),\quad \Delta^3 u = \Delta(\Delta^2 u),\ \ldots,$$

а интегрирование взято по поверхности шара радиуса r, с центром в точке (x, y, z).

994. Доказать формулу Максвелла:

$$\int\int_\omega\int \frac{\partial v}{\partial x}\Delta v\,d\omega = \frac{1}{2}\int\int_\sigma\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right]\cos(n, x)\,d\sigma +$$
$$+\int\int_\sigma \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\cos(n, y)\,d\sigma + \int\int_\sigma \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z}\cos(n, z)\,d\sigma.$$

Здесь σ — поверхность объема ω, в котором функция v непрерывна со вторыми производными.

995. Доказать равенство Римана:

$$\int\int_\sigma [uF(v) - vG(u)]\,d\sigma = \int_S (M\,dx + N\,dy).$$

Здесь S — контур площади σ,

$$F(v) = \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} - a\frac{\partial v}{\partial x} - b\frac{\partial v}{\partial y} - cv,\ G(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} - cu,$$

а выражения для M и N должны быть найдены.

996. Если проекции скорости жидкости в момент t в точке (x, y, z) равны функциям $u(x, y, z, t)$, $v(x, y, z, t)$ и $w(x, y, z, t)$, то количество жидкости, протекающей сквозь поверхность σ за время от t_1

до t_2, равно интегралу

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \iint_{\sigma} (u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma)\, d\sigma,$$

где α, β, γ — углы нормали к поверхности σ с осями. Вывести отсюда, что для несжимаемой жидкости должно выполняться условие:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

997. Изучить изменение функции $P(x)$, где $P(x) = \mu \int_a^b |y - x|\, dy$, при изменении x в промежутке $(-\infty, +\infty)$.

998. Найти вторую производную от

$$P(x) = \int_a^b \mu(y)\,|y - x|\, dy,$$

где функция $\mu(y)$ непрерывна.

999. Пользуясь интегралом Пуассона $\int_0^\pi \ln(a^2 - 2a\cos\varphi + 1)\, d\varphi$, равным 0 при $-1 < a < 1$ и $2\pi\ln|a|$, если $|a| > 1$, найти логарифмический потенциал однородного круга, т. е. интеграл $\mu \iint_\sigma \ln r\, d\sigma$, где r — расстояние между точкой M и точкой на площади круга σ, радиус которого R.

1000. Логарифмическим потенциалом однородного отрезка $(-1, 1)$ называется интеграл $P = \mu \int_{-1}^{+1} \ln r\, d\xi$, где r — расстояние между точками (x, y) и $(\xi, 0)$. Найти уравнение кривой, на которой $P(x, y) = P(1, 0)$.

1001. Найти логарифмический потенциал круга $x^2 + y^2 = a^2$, если плотность μ в точке (x, y) есть данная функция радиуса-вектора из начала: $\mu = f(r)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Логарифмическим потенциалом площади σ в точке (x, y) называется интеграл

$$P(x, y) = \iint_\sigma \mu(\xi, \eta) \ln \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}\, d\xi\, d\eta.$$

1002. Найти в точке $M(x, y, z)$ ньютонов потенциал однородной оболочки шара $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ с поверхностной плотностью μ, равной некоторой постоянной, т. е. найти интеграл $\iint\limits_{\sigma} \mu \frac{d\sigma}{r}$, где σ — поверхность шара, а r — расстояние переменной точки (ξ, η, ζ) на этой поверхности до данной точки M.

1003. Найти в точке $M(x, y, z)$ ньютонов потенциал однородного шара, т. е. интеграл

$$P = \iiint\limits_{\omega} \mu \frac{d\xi\, d\eta\, d\zeta}{r},$$

где μ — постоянная плотность, (ξ, η, ζ) — точка внутри шара, $\xi^2+\eta^2+\zeta^2 = a^2$, $r = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$ — расстояние от точки (ξ, η, ζ) до точки (x, y, z).

1004. Тот же вопрос для шара, у которого плотность μ равна данной функции $f(\rho)$, где $\rho^2 = \xi^2+\eta^2+\zeta^2$.

1005. В точке $(0, 0, z)$ найти ньютонов потенциал верхней половины шара $x^2+y^2+z^2 = a^2$ при постоянной плотности μ.

1006. Найти ньютонов потенциал однородного сферического слоя между двумя концентрическими сферами радиусов a и b, где $a < b$.

1007. Найти в вершине конуса ньютонов потенциал тела конуса с радиусом основания r и высотой h.

1008. Показать, что тело постоянной плотности и данной массы сильнее всего притягивает материальную точку (по закону Ньютона), если оно ограничено поверхностью $R = a\sqrt{\cos\vartheta}$ (материальная точка взята за начало координат, направление силы притяжения за ось Oz; R, ϑ — сферические координаты).

Найти эту силу и сравнить ее с силой притяжения шаром (той же массы) материальной точки, лежащей на его поверхности.

1009. Найти в точке $M(x, y)$ ньютонов потенциал неоднородного отрезка $(-a, a)$, т. е. интеграл $\int\limits_{-a}^{a} \frac{\mu(\xi)\, d\xi}{\sqrt{(\xi-x)^2+y^2}}$, если $\mu(\xi) = \frac{\xi}{a}$.

1010. Найти ньютонов потенциал однородной круговой пластинки $x^2+y^2 = a^2$, $z = 0$ в точке $(0, 0, z)$.

1011. Доказать, что при $r_1 \to \infty$ имеет место равенство:

$$\lim r_1 \iiint\limits_{\omega} \mu \frac{d\omega}{r} = \iiint\limits_{\omega} \mu\, d\omega.$$

Здесь $r_1^2 = x^2+y^2+z^2$, а r — расстояние точки (x, y, z) до произвольной точки (ξ, η, ζ) внутри объема ω.

1012. Доказать тождество: $\iiint\limits_{\omega} \frac{d\xi\, d\eta\, d\zeta}{r} = \frac{1}{2} \iint\limits_{\sigma} \cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})\, d\sigma$,

где σ — поверхность тела объема ω; $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль σ; $\mathbf{r}$ — вектор от точки (x, y, z) к точке (ξ, η, ζ); r — его длина.

1013. При тех же условиях, что и в предыдущей задаче, доказать тождество:

$$\iiint\limits_{\omega} \frac{d\xi\, d\eta\, d\zeta}{r^2} = \iint\limits_{\sigma} \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r}\, d\sigma.$$

1014. Написать аналогичные тождества (см. зад. 1013) для площади σ и ее контура S.

1015. Доказать равенство: $\int\limits_{S} \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r}\, ds = 0$, если точка (x, y) вне области, ограниченной контуром S, и $= 2\pi$, если контур S совершает один полный обход вокруг точки (x, y).

1016. Проекции на оси Ox, Oy, Oz силы, с которой точка с массой m притягивается по закону Ньютона телом с плотностью μ, выражаются формулами:

$$X = fm\frac{\partial P}{\partial x} = fm \iiint\limits_{\omega} \mu \frac{(\xi - x)\, d\omega}{r^3},$$

$$Y = fm\frac{\partial P}{\partial y} = fm \iiint\limits_{\omega} \mu \frac{(\eta - y)\, d\omega}{r^3},$$

$$Z = fm\frac{\partial P}{\partial z} = fm \iiint\limits_{\omega} \mu \frac{(\zeta - z)\, d\omega}{r^3},$$

где $P = \iiint \mu \frac{d\omega}{r}$, $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\xi - z)^2}$, f — постоянная закона тяготения. Пользуясь этим, вычислить силу притяжения шаром радиуса a с плотностью μ точки массы m, расположенной на его поверхности.

1017. По закону Био — Савара каждый элемент $\mathbf{ds}$ тока силой I создает в точке $M(x, y, z)$ магнитное поле, напряженность которого можно выразить векторным произведением $-\frac{kI}{r^3}\mathbf{ds}\times\mathbf{r}$, где $\mathbf{r}$ — вектор, идущий от $\mathbf{ds}$ к M. Доказать, что напряженность поля $\mathbf{H}$, создаваемая замкнутым током, идущим по контуру S, выражается векторным интегралом $\mathbf{H} = -kI \int\limits_{S} \frac{\mathbf{ds}\times\mathbf{r}}{r^3}$; здесь k — коэффициент пропорциональности.

1018. Пользуясь предыдущим результатом и формулой Стокса, доказать равенство $\mathbf{H} = -kI \operatorname{grad} W$, где W — телесный угол, под которым из точки M видна площадь σ с контуром S, равный интегралу $\iint\limits_{\sigma} \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2}\, d\sigma$.

1019. Вычисляется $\int\limits_{s_1} ds_1 \int\limits_{s_2} \frac{ds_2 \times \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$, взятый по двум замкнутым контурам s_1 и s_2, где $\mathbf{r}$ — вектор, соединяющий переменные точки на контуре.

Рассматривая $\frac{ds_1 \times ds_2 \cdot \mathbf{e}_r}{|\mathbf{r}|^2}$ как телесный угол, доказать, что этот двойной интеграл равен 0, если один контур не зацепляется с другим, и равен $\pm 4\pi$, если он зацепляется (один раз).

§ 12. Многократные интегралы

В простейших случаях многократные интегралы вычисляются непосредственно интегрированием по формуле:

$$\iint\limits_{\omega} \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n =$$

$$= \int\limits_{x_1'}^{x_1''} dx_1 \int\limits_{x_2'}^{x_2''} dx_2 \dots \int\limits_{x_n'}^{x_n''} f(x_1, x_2, \dots, x_n)\, dx_n.$$

Здесь пределы интегрирования определяются из условий, которыми задается область ω. Пределы интегрирования по какому-нибудь переменному могут зависеть от наружных переменных. Пределы последнего интегрирования, т. е. числа x_1' и x_1'' должны быть постоянными.

В более сложных случаях приходится прибегать к замене переменных. Если при этом формулы замены переменных имеют вид

$$x_1 = \varphi_1(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), \quad x_2 = \varphi_2(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), \dots, x_n = \varphi_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n),$$

то формула для преобразования интеграла будет:

$$\iint\limits_{\omega} \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n =$$

$$= \iint\limits_{\omega} \dots \int f(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)\, |J|\, d\xi_1\, d\xi_2 \dots d\xi_n.$$

Здесь J — якобиан, величина которого предполагается сохраняющей знак; область ω_1 — область изменения переменных $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, соответствующая области ω изменения переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Найти следующие интегралы:

1020. $\iint \dots \int dx_1\, dx_2 \dots dx_n$, где все $x_k > 0$ и $x_1 + x_2 + \dots$ $\dots + x_n \leqslant 1$.

1021. $\int\int\ldots\int x_1\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n$ при $x_k>0$ и $x_1+x_2+\ldots+x_n\leqslant 1$.

1022. $$\int\int\limits_{|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_n|<a}\ldots\int dx_1\,dx_2\ldots dx_n.$$

1023. $$\int\limits_0^1\int\limits_0^1\ldots\int\limits_0^1(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n.$$

1024. $$\int\limits_0^1\int\limits_0^1\ldots\int\limits_0^1(x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_{n-1}x_n)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n.$$

1025. Доказать равенство

$$u_n(a)=a^n v_n,$$

где

$$u_n(a)=\int\int\limits_{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2<a^2}\ldots\int dx_1\,dx_2\ldots dx_n,\quad v_n=u_n(1).$$

1026. При прежних обозначениях очевидны равенства:

$$v_n=\int\int\limits_{x_1^2+x_2^2<1}dx_1\,dx_2\int\int\limits_{x_3^2+x_4^2+\ldots+x_n^2<1-x_1^2-x_2^2}\ldots\int dx_3\,dx_4\ldots dx_n=$$

$$=\int\int\limits_{x_1^2+x_2^2<1}(1-x_1^2-x_2^2)^{\frac{n}{2}-1}v_{n-2}\,dx_1\,dx_2.$$

Пользуясь ими, доказать, что

$$u_n(a)=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}a^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

В частности, $u_1=2a$, $u_2=\pi a^2$, $u_3=\frac{4}{3}\pi a^3$, $u_4=\frac{\pi^2}{2}a^4$, ...

1027. Если

$$u_n=\int\int\limits_{\substack{x_1+x_2+\ldots x_n<a\\ 0<x_1,\ 0<x_2,\ldots,\ 0<x_n}}\ldots\int x_1^{\alpha_1-1}x_2^{\alpha_2-1}\ldots x_n^{\alpha_n-1}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n,$$

то легко доказать, что $u_n(a)=a^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}v_n$, где $v_n=u_n(1)$.

Пользуясь этим и равенством

$$v_n = \int_0^1 x_1^{\alpha_1-1}\,dx_1 \underset{\substack{x_2+x_3+\ldots+x_n<1-x_1\\ 0<x_2,\ldots,\,0<x_n}}{\int\int\ldots\int} x_2^{\alpha_2-1}x_3^{\alpha_3-1}\ldots x_n^{\alpha_n-1}\,dx_2\,dx_3\ldots dx_n,$$

доказать, что

$$u_n(a) = \frac{\Gamma(\alpha_1)\,\Gamma(\alpha_2)\ldots\Gamma(\alpha_n)}{\Gamma(1+\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)}\,a^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}.$$

Доказать равенства:

1028. $$\int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \ldots \int_0^{x_{n-1}} f(x_n)\,dx_n = \int_0^x f(t)\,\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt.$$

1029. $$\int_0^x x_1\,dx_1 \int_0^{x_1} x_2\,dx_2 \ldots \int_0^{x_{n-1}} x_n\,dx_n \int_0^{x_n} f(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\cdot 4\ldots 2n}\int_0^x f(t)\,(x^2-t^2)^n\,dt.$$

1030. Привести к простому интегралу кратный интеграл

$$\int\int\ldots\int x_1^{\alpha_1-1}x_2^{\alpha_2-1}\ldots x_n^{\alpha_n-1}F(x_1+x_2+\ldots+x_n)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n,$$

взятый по области, определяемой неравенствами

$$0<x_1,\ 0<x_2,\ \ldots,\ 0<x_n,\ x_1+x_2+\ldots+x_n<a.$$

Указание: Один из путей — замена переменных по формулам

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=u,\ \ x_1=x_1,\ \ x_2=x_2,\ \ x_3=x_3,\ \ldots,\ x_{n-1}=x_{n-1}.$$

1031. Точки $M(x, y, z)$ и $M_1(\xi, \eta, \zeta)$ независимо друг от друга пробегают весь объем тела с плотностью $p=p(x, y, z)$. Потенциалом тела на себя называется интеграл

$$\frac{1}{2}\int\int\int\int\int\int \frac{p(x, y, z)\,p(\xi, \eta, \zeta)\,dx\,dy\,dz\,d\xi\,d\eta\,d\zeta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}.$$

Найти величину потенциала на себя однородного шара $x^2+y^2+z^2=a^2$. Его величина измеряет работу, производимую при передвижении из бесконечности в одно тело частиц, притягивающихся по закону Ньютона.

Указание. Два пути быстро приводят к цели: 1) Воспользоваться тем, что интеграл по переменным (ξ, η, ζ) дает потенциал шара во внутренней точке (x, y, z), найденный в одной из прежних задач. 2) Учесть работу dA, совершаемую, если массы, приходящие из бесконечности, увеличивают радиус шара с r на $r+dr$, и проинтегрировать полученное по r от 0 до a.

ОТДЕЛ ДЕСЯТЫЙ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Составление дифференциальных уравнений по данным их интегралам

Уравнение $f(x, y, a) = 0$, где a — параметр, постоянный в каждом уравнении, но изменяющийся от уравнения к уравнению, изображает обычно семейство линий. Взяв производную от этого уравнения, получаем: $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0$. Если исключить a из двух уравнений, то получится уравнение вида: $\varphi(x, y, y') = 0$. Оно отражает некоторое свойство, общее различным кривым данного семейства, и называется дифференциальным уравнением семейства кривых $f(x, y, a) = 0$. Само исходное уравнение $f(x, y, a) = 0$ называется общим интегралом дифференциального уравнения $\varphi(x, y, y') = 0$. Если дано уравнение $f(x, y, a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$, содержащее n параметров $a_1, a_2, \ldots, a_n$, то оно изображает семейство линий с n параметрами. Дифференцируя его n раз и исключая $a_1, a_2, \ldots, a_n$ из этих n уравнений и данного уравнения $f(x, y, a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$, получим уравнение, не содержащее параметров $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Оно имеет вид: $\psi(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$ и называется дифференциальным уравнением данного семейства линий с n параметрами. Само исходное уравнение $f(x, y, a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$ называется общим интегралом дифференциального уравнения $\psi(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$.

Найти дифференциальные уравнения следующих семейств линий и отметить, там, где это просто, свойства линий, выражаемые этими уравнениями.

1032. $y = ax$.

1033. $x^2 + y^2 = a^2$.

1034. $x^2 + y^2 = ax$.

1035. $y = ax^2$.

1036. $y = ax + a^2$.

1037. $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

1038. $(x - a)^2 + y^2 = 1$.

1039. $y = ae^{\frac{x}{a}}$.

1040. Семейства софокусных кривых 2-го порядка $\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} = 1$, где λ — параметр.

1041. Семейства циклоид $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, где a — параметр.

1042. Семейства циклоид: $x + C = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, где C — параметр.

1043. Семейства трактрис:

$$x + C = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2},$$

где C — параметр.

Найти дифференциальные уравнения следующих семейств линий с несколькими параметрами и отметить там, где это просто, свойство, выраженное каждым из этих уравнений.

1044. $y = ax + b$.

1045. $y = ax^2 + bx + c$.

1046. $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 1$.

1047. $(x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2$.

1048. $y = A \sin(x + \alpha)$.

1049. $y = e^x(Ax + B)$.

1050. Доказать, что дифференциальное уравнение всех парабол

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad B^2 - 4AC = 0$$

имеет вид

$$\left[(y'')^{-\frac{2}{3}}\right]'' = 0 \quad \text{или} \quad 5y''' - 3y''y^{\mathrm{IV}} = 0.$$

1051. Доказать, что дифференциальное уравнение кривых 2-го порядка имеет вид

$$\left[(y'')^{-\frac{2}{3}}\right]''' = 0.$$

Найти системы дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют координаты (x, y, z) точек следующих семейств линий.

1052. $y = ax$, $z = bx$.

1053. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = b$.

1054. $y = a \cos x$, $z = a \sin x$.

1055. $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$.

1056. Найти дифференциальные уравнения нормалей к конусу $x^2 + y^2 = z^2$.

1057. Тот же вопрос для параболоида $x^2 + y^2 = 2z$.

§ 2. Нахождение функций по их полному дифференциалу

Выражение $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ является полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$ в том и только в том случае, если $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. В этом случае величина $u(x, y)$ легко может быть получена вычислением криволинейного интеграла

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy.$$

Такого же рода результаты существуют и для функций от большего числа переменных. Так, например, выражение $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ является полным дифференциалом функции $u(x, y, z)$ в том и только в том случае, если

$$\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}.$$

При этом

$$u(x, y, z)=\int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} P\,dx+Q\,dy+R\,dz.$$

В этих формулах выбор постоянных x_0, y_0, z_0 и формы пути, по которому идет интегрирование, произвольны. Поэтому, в частности, для двух переменных можно писать:

$$u(x, y)=\int_{x_0}^{x} P(x, y)\,dx+\int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\,dy.$$

Аналогичная формула для трех переменных имеет вид:

$$u(x, y, z)=\int_{x_0}^{x} P(x, y, z)\,dx+\int_{y_0}^{y} Q(x_0, y, z)\,dy+\int_{z_0}^{z} R(x_0, y_0, z)\,dz.$$

Найти функции по полным их дифференциалам:

1058. $dz=(x^2-y^2)\,dx-2xy\,dy.$

1059. $dz=y\,dx+x\,dy+\dfrac{x\,dy-y\,dx}{x^2}.$

1060. $dz=\dfrac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}+x\,dy+y\,dx.$

1061. $dz=\dfrac{2x(1-e^y)\,dx}{(1+x^2)^2}+\dfrac{e^y\,dy}{1+x^2}.$

1062. $dz=\dfrac{(x+2y)\,dx+y\,dy}{(x+y)^2}.$

1063. $du=\dfrac{dx-3\,dy}{z}+\dfrac{3y-x}{z^2}\,dz.$

1064. $du=(x^2-yz)\,dx+(y^2-xz)\,dy+(z^2-xy)\,dz.$

Если сила, действующая в поле, есть $\operatorname{grad} u$, т. е. если ее проекции на оси f_x, f_y, f_z равны соответственным частным производным: $f_x=\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $f_y=\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $f_z=\dfrac{\partial u}{\partial z}$, то u называется потенциалом сил.

1065. Найти потенциал сил, если $f_x=2x$, $f_y=f_z=2y+2z$.

1066. Найти потенциал сил, если $\mathbf{f}=-\dfrac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$, где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор из начала в точку (x, y, z).

1067. Проекции силы на оси даны формулами:

$$f_x=\frac{x+y-3z}{(x+y+z)^3}, \quad f_y=\frac{ax+by+cz}{(x+y+z)^3}, \quad f_z=\frac{\alpha x+\beta y+\gamma z}{(x+y+z)^3}.$$

Определить постоянные a, b, c, α, β, γ так, чтобы сила имела потенциал u, и найти его.

1068. Определить постоянные a и b так, чтобы выражение

$$\frac{(ax^2+2xy+y^2)\,dx-(x^2+2xy+by^2)\,dy}{(x^2+y^2)^2}$$

было полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$, и найти эту функцию.

1069. Доказать, что выражение $\frac{\partial^{n+1}\ln r}{\partial x^n\,\partial y}dx-\frac{\partial^{n+1}\ln r}{\partial x^{n+1}}dy$ есть полный дифференциал некоторой функции u, и найти эту функцию, учитывая, что $\frac{\partial^2\ln r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\ln r}{\partial y^2}=0$.

1070. Дифференциал длины дуги на некоторой поверхности выражается формулой $ds^2=A(x, y)\,dx^2+B(x, y)\,dy^2$. Введя новые переменные по формулам: $u=P(x, y)$, $v=Q(x, y)$, где P и Q — некоторые функции, формуле для ds^2 можно придать вид: $ds^2=du^2+dv^2$, если функции P и Q удовлетворяют условиям:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^2=A(x, y),\quad \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)^2=B(x, y),$$

$$\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial Q}{\partial y}=0.$$

Доказать, что для возможности подбора таких P и Q функции $A(x, y)$ и $B(x, y)$ должны удовлетворять условию

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{\sqrt{A}}\frac{\partial\sqrt{B}}{\partial x}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\frac{1}{\sqrt{B}}\frac{\partial\sqrt{A}}{\partial y}\right)}{\partial y}=0.$$

§ 3. Интегрирование полных дифференциалов

Если дифференциальное уравнение имеет вид

$$P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy=0,$$

причем

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y},$$

то левая часть его есть дифференциал некоторой функции $u(x, y)$. Уравнение можно переписать в таком виде: $du=0$. Его общий интеграл: $u=c$.

Проинтегрировать следующие уравнения:

1071. $(x+y)\,dx+(x-y)\,dy=0$.

1072. $(3x^2+6xy^2)\,dx+(6x^2y+4y^3)\,dy=0$.

1073. $(x^3-3xy^2)\,dx+(y^3-3x^2y)\,dy=0$.

1074. $\dfrac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{x\,dy-y\,dx}{x^2}=0.$

1075. $x\,dx+y\,dy+\dfrac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}=0.$

В следующих задачах требуется, найдя общий интеграл, выбрать в нем постоянное C так, чтобы получилась кривая, проходящая через данную точку $M(1,\ 1)$.

1076. $\dfrac{2x\,dx}{y^3}+\dfrac{y^2-3x^2}{y^4}\,dy=0.$

1077. $\left(1+e^{\frac{x}{y}}\right)dx+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\dfrac{x}{y}\right)dy=0.$

§ 4. Уравнения с отделяющимися переменными

Если в уравнении $P\,dx+Q\,dy=0$ функции P и Q распадаются на два множителя, каждый из которых содержит не более, чем одну из переменных x или y, т. е. если $P=\psi(x)F(y)$, $Q=f(y)\varphi(x)$, то уравнение принимает вид: $\psi(x)F(y)\,dx+f(y)\varphi(x)\,dy=0$. Если $F(y)$ и $\varphi(x)$ отличны от нуля, то отсюда следует, что $\dfrac{\psi(x)}{\varphi(x)}\,dx+\dfrac{f(y)}{F(y)}\,dy=0$. Общий интеграл этого уравнения имеет вид:

$$\int\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}\,dx+\int\frac{f(y)}{F(y)}\,dy=C.$$

З а м е ч а н и е. Равенства $F(y)=0$ и $\varphi(x)=0$ представляют особые интегралы данного уравнения, если по смыслу вопроса соответствующая переменная имеет право обратиться в постоянную.

Проинтегрировать уравнения:

1078. $(1+y^2)\,dx+xy\,dy=0.$

1079. $xy(1+x^2)\,y'=1+y^2.$

1080. $(1+y^2)\,dx=x\,dy.$

В следующих задачах, найдя общий интеграл, выделить, где это указано, кривую, проходящую через заданную точку $M(x_0,\ y_0)$.

1081. $\dfrac{x\,dx}{1+y}-\dfrac{y\,dy}{1+x}=0;$ $M(1,\ 1);$ $M(0,\ 1).$

1082. $y'\sin x=y\ln y;$ $M(0,\ 1);$ $M\left(\dfrac{\pi}{2},\ 1\right).$

1083. $(1+e^x)\,yy'=e^x;$ $M(1,\ 1).$

1084. $x\sqrt{1-y^2}\,dx+y\sqrt{1-x^2}\,dy=0;$ $M(0,\ 1).$

1085. $2\sqrt{y}\,dx=dy;$ $M(0,\ 1).$

1086. $y\ln y\,dx+x\,dy=0;$ $M(1,\ 1).$

1087. $(a^2+y^2)\,dx+2x\sqrt{ax-x^2}\,dy=0;$ $M(a,\ 0).$

1088. $y' + x^2y = x^2$; $y = 1$ при $x = 2$; $y = a$ при $x = 0$.

1089. $(1 - x^2)y' - xy = axy^2$. **1090.** $dy + (xy - xy^3)\,dx = 0$.

1091. $y = xy'^2 + y'^2$.

1092. $xyy'^2 + (x^2 + y^2)y' + xy = 0$.

1093. $x(1 + y'^2) = 1$. **1094.** $x(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} = a$.

1095. $x = \dfrac{ay'}{\sqrt{1 + y'^2}}$. **1096.** $y\sqrt{1 + y'^2} = y'$.

1097. Найти кривую, у которой средняя ордината, т. е. величина $\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x y\,dx$, пропорциональна последней ординате.

1098. Найти кривую, у которой абсцисса центра тяжести площади, заключенной между прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x = \xi$ и самой кривой, равна $\frac{3}{4}\xi$.

Иногда переменные непосредственно не отделяются, но после введения новых переменных могут быть отделены. В ближайших задачах такое отделение достигается подстановкой $ax + by + c = u$, где a, b и c соответственно подобраны.

Проинтегрировать следующие уравнения:

1099. $y' = (x - y)^2 + 1$. **1100.** $y' = \sin(x - y)$.

1101. $y' = ax + by + c$. **1102.** $y'^2 = ax + by + c$.

1103. $y' = (ax + by + c)^2$. **1104.** $(x + y)^2 y' = a^2$.

1105. Найти общий интеграл уравнения

$$(y - x)\sqrt{1 + x^2}\,dy = (1 + y^2)^{\frac{3}{2}}\,dx,$$

применив подстановку:

$$x = \operatorname{tg} u, \quad y = \operatorname{tg} v.$$

Следующие задачи приводят к уравнениям с отделяющимися переменными при соответственном их выборе.

1106. Найти кривые, у которых длина подкасательной — постоянная, равная a. (Лейбниц, 1684.)

1107. Найти кривые, у которых поднормаль повсюду равна p.

1108. Найти кривые, у которых отрезок касательной, заключенный между осями, делится пополам точкой касания.

1109. Найти кривые, у которых такой же отрезок делится точкой касания в отношении $m : n$.

1110. Пользуясь полярными координатами, найти кривые, пересекающие все радиусы-векторы под углом α, где $\operatorname{tg}\alpha = a$.

1111. Найти кривые, у которых угол φ от полярной оси до радиуса-вектора в точку касания равен углу μ от продолжения радиуса-вектора до касательной.

1112. Такой же вопрос, что и в предыдущей задаче, но $\mu = 2\varphi$.

1113. На поверхности $z^2 = 2ay$ найти линии, касательные к которым составляют с Oz данный угол γ.

1114. Тот же вопрос для поверхности $x^2 + y^2 = 2az$.

1115. Найти кривые, пересекающие все параллели поверхности вращения $x^2 + y^2 = a^2 \operatorname{ch}^2 \frac{z}{a}$ под углом 45°.

1116. Тот же вопрос для конуса $x^2 + y^2 = z^2$.

1117. Найти кривые, пересекающие все образующие цилиндра $y = \varphi(x)$ под углом α.

1118. Найти локсодромию, т. е. кривую, пересекающую под углом α все меридианы сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. (Здесь лучше всего для точек поверхности шара ввести сферические координаты.)

1119. Какой угол с меридианами составляет локсодромия, идущая от Измаила на Дунае до мыса Дежнева. Их широты 45°20′ и 66°, а долготы 28°45′ и 170° (восточная).

1120. Найти кривую, у которой площадь криволинейной трапеции между точками оси Ox: $(a, 0)$ и $(x, 0)$ и точками кривой: $A(a, m)$ и $B(x, y)$ была бы равна произведению дуги AB на m.

1121. Сосуд содержит M *см*^{3} раствора. В него каждую секунду непрерывно поступает q *см*^{3} воды, которая тут же размешивается. Из сосуда вытекает в секунду q *см*^{3} раствора. Доказать, что количество растворенного вещества m выражается формулой: $m = m_0 e^{-\frac{q}{M}t}$, где m_0 — начальное количество вещества, а t — время в секундах от начала процесса.

1122. Канат намотан на столб радиуса r. Сила, прижимающая его элемент Δs к столбу, эквивалентна величине $\frac{T}{r}\Delta s$, где T — натяжение каната в данной точке. Благодаря трению элемент может скользить лишь в том случае, если движущая его сила больше, чем kf, где k — коэффициент трения, а f — сила, прижимающая элемент к столбу. Получить отсюда дифференциальное уравнение: $dT = -\frac{kT}{r} ds$ и его общий интеграл: $T = T_0 e^{-\frac{ks}{r}}$, где T — натяжение, при котором начинается скольжение, T_0 — натяжение в начальной точке.

1123. Свет с яркостью f_0 падает на поглощающую свет среду. Считая, что поглощение слоем Δx приближенно пропорционально Δx и яркости f, доказать, что на глубине x яркость выражается равенством: $f = f_0 e^{-kx}$, где k — коэффициент пропорциональности.

1124. Лучи от источника света поглощаются окружающей средой. Считая, что поглощение света между шарами с радиусами r и $r + \Delta r$

и с центром в источнике света, с точностью до малых высшего порядка, равно $kf \cdot 4\pi r^2 \Delta r$, доказать, что яркость на расстоянии r от источника света равна $f_0 \frac{e^{-kr}}{r^2}$, где $f_0 e^{-k}$ — яркость света при $r = 1$, а k — коэффициент пропорциональности.

1125. Найти кривую, которая повсюду была бы одинаково освещена (с данной освещенностью a) точечным источником света силы A. Известно, что освещенность обратно пропорциональна квадрату расстояния и пропорциональна синусу угла между лучом и освещаемой поверхностью.

1126. В цилиндрический сосуд с площадью основания S *см*^{2} и высотой H *см* равномерно вливается вода $\left(V \frac{см^3}{сек}\right)$ и одновременно частью выливается через отверстие в дне площадью σ *см*^{2}. Через какое время сосуд наполнится до верху и каково условие того, чтобы он когда-нибудь наполнился? Скорость истечения определяется законом Торичелли (см. зад. 506).

1127. Тяжелая материальная точка массы m начинает падать в сопротивляющейся среде, причем сила сопротивления зависит от скорости по закону $f = kv^n$. Определить закон изменения скорости во времени и путь пройденный за время t при $n = 1; 2$.

1128. Газ с первоначальной плотностью ρ_0 и давлением p_0 находится в сосуде, вращающемся около своей оси с постоянной угловой скоростью ω. Найти закон распределения давления в установившемся движении, когда все частицы газа будут вращаться с угловой скоростью ω. Газ подчиняется закону Бойля — Мариотта, весом газа пренебречь.

§ 5. Уравнения однородные и приводящиеся к ним

Однородные уравнения приводятся к каждому из видов: $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ или $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$, где P и Q — однородные функции одинакового измерения. Они приводятся к уравнениям с отделяющимися переменными любой из подстановок: $y = tx$ или $x = ty$.

Решить следующие уравнения, выделив интегральную кривую, проходящую через данную точку $M(x_0, y_0)$, там, где она дана:

1129. $(x + y)\,dx - (x - y)\,dy = 0$.

1130. $(x^2 + 2xy - y^2)\,dx + (y^2 + 2xy - x^2)\,dy = 0$; $M(1, -1)$.

1131. $x\,dy - y\,dx = y\,dy$. **1132.** $y^2\,dx + (x^2 - xy)\,dy = 0$.

1133. $(x^2 + xy + y^2)\,dx = x^2\,dy$.

1134. $(3x^2 + 6xy + 3y^2)\,dx + (2x^2 + 3xy)\,dy = 0$.

1135. $\frac{dx}{x^2 - xy + y^2} = \frac{dy}{2y^2 - xy}$. **1136.** $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{3x^2 - y^2}$.

1137. $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$; $M(-1, 0)$. **1138.** $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$.

1139. $y\,dx + (2\sqrt{xy} - x)\,dy = 0$. **1140.** $xy' = y \ln \frac{y}{x}$.

1141. $y'(y' + y) = x(x + y)$; $M(0; 0)$.

1142. $(xy' + y)^2 = y^2 y'$. **1143.** $x^2 y'^2 - 3xyy' + 2y^2 = 0$.

Уравнения $y' = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1 x + b_1 y + c_1}\right)$ при $ab_1 - a_1 b \neq 0$ приводятся к однородным подстановкой $x = \xi + \alpha$, $y = y + \beta$, где (α, β) — точка пересечения прямых $ax + by + c = 0$, $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$. Если же $ab_1 - a_1 b = 0$, то подстановка $ax + by + c = u$ позволяет отделить переменные.

Решить уравнения:

1144. $(x + y + 1)\,dx + (2x + 2y - 1)\,dy = 0$.

1145. $(x - 2y + 5)\,dx + (2x - y + 4)\,dy = 0$.

1146. Доказать, что интегральные кривые уравнения

$$(ax + by + c)\,dx + (ay - bx + c_1)\,dy = 0$$

— логарифмические спирали.

1147. Доказать теорему: если $P\,dx + Q\,dy = 0$ — однородное уравнение, а выражение $P\,dx + Q\,dy$ — полный дифференциал, то общий интеграл данного уравнения имеет вид: $Px + Qy = C$, если степени P и Q отличны от -1.

1148. Найти кривые, у которых треугольник между Oy, касательной и радиусом-вектором из начала в точку касания — равнобедренный (три варианта).

Дифференциальное уравнение можно назвать обобщенным однородным, если, подобрав соответствующее значение α, можно достичь того, что все члены уравнения окажутся имеющими одно и то же измерение, когда считать x и dx — величинами первого измерения, а y и dy — измерения α (т. е. измерение y' надо считать равным $\alpha - 1$). В этом случае подстановка $\frac{y}{x^\alpha} = t$ приводит к разделению переменных.

Решить уравнения:

1149. $y(1 + xy)\,dx + (1 - xy)\,x\,dy = 0$.

1150. $(x^2y^2 + 1)\,y\,dx + (x^2y^2 - 1)\,x\,dy = 0$.

1151. $(x^2 - y^4)\,y' - xy = 0$.

1152. $\left(y + y\sqrt{x^2y^4 - 1}\right)dx + 2x\,dy = 0$.

1153. $(y^4 - 3x^2)\,dy + xy\,dx = 0$. **1154.** $y^3\,dx + 2(x^2 - xy^2)\,dy = 0$.

1155. $(x^2y^2 - 1)\,y' + 2xy^3 = 0$. **1156.** $(x^6 - y^4)\,dy = 3x^5 y\,dx$.

1157. $2y' + y^2 + \frac{1}{x^2} = 0$. **1158.** $x^2(y' + y^2) = a(xy - 1)$.

1159. $xy^2(xy' + y) = a^2$.

§ 6. Уравнения линейные и приводящиеся к ним

Линейные уравнения 1-го порядка имеют вид: $y'+Py+Q=0$. Один из способов их решения состоит в том, что уравнение умножают на множитель u, выбранный так, чтобы величина Pu равнялась u'. Тогда уравнение принимает вид: $uy'+u'y=-uQ$ или $(uy)'=-uQ$, и интегрируется без труда. Таким интегрирующим множителем u является

$$u=e^{\int P\,dx}.$$

Для следующих уравнений найти общий интеграл, а в случаях, где указано, найти частный интеграл, который обращается в y_0 при $x=x_0$.

1160. $xy'+2y=3x;\quad x_0=0,\ y_0=0.$

1161. $xy'+3y=x^2.$ **1162.** $y'+ay=e^{mx}.$

1163. $(1+x^2)y'-2xy=(1+x^2)^2.$

1164. $y'+2xy=2xe^{-x^2}.$ **1165.** $y'\sin x-y=1-\cos x.$

1166. $y'+y\cos x=\sin x\cos x;\quad x_0=0,\ y_0=1.$

1167. $(1-x^2)y'+xy=1;\quad y=1$ при $x=0.$

Следующие уравнения оказываются линейными, если принять y за независимое переменное, а x — за функцию:

1168. $(y^2-6x)y'+2y=0.$

1169. $(x-2xy-y^2)y'+y^2=0.$

Уравнения $y'+Py+Qy^n=0$ называются уравнениями Бернулли. Они сводятся к линейному делением на y^n с последующей подстановкой $y^{1-n}=u$.

Найти общий интеграл уравнений:

1170. $xy'+y=y^2\ln x.$ **1171.** $y'+2xy=2x^3y^3.$

1172. $3y^2y'-ay^3=x+1.$ **1173.** $y^{n-1}(ay'+y)=x.$

1174. $dx+(x+y^2)\,dy=0.$ **1175.** $(xy+x^2y^3)\,y'=1.$

Следующие уравнения сводятся к линейным простыми заменами переменных:

1176. $(x^2+y^2+1)\,dy+xy\,dx=0.$

1177. $(x^2+y^2+2x-2y)\,dx+2(y-1)\,dy=0.$

1178. $y'-1=e^{x+2y}.$

1179. $xy'+1=e^y.$

1180. $y'\cos y+\sin y=x+1.$

1181. $y'+\sin y+x\cos y+x=0.$

Дальнейшие задачи сводятся к линейным уравнениям, а также другим уравнениям, уже рассмотренным раньше.

1182. Решить функциональное уравнение $\int\limits_0^1 \varphi(\alpha x)\,d\alpha = n\varphi(x)$.

1183. $\int\limits_a^x xy\,dx = x^2 + y$. Найти y.

1184. $x\int\limits_0^x y\,dx = (x+1)\int\limits_0^x xy\,dx$. Найти y.

1185. $\int\limits_0^x \sqrt{1+y'^2}\,dx = 2\sqrt{x} + y$. Найти y.

1186. $2\int\limits_0^x y\sqrt{1+y'^2}\,dx = 2x + y^2$.

1187. Доказать, что дифференциальное уравнение

$$f_1(x, y)\,dx + f_2(x, y)\,dy + \varphi(x, y)(x\,dy - y\,dx) = 0,$$

где $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$, $\varphi(x, y)$ однородные функции, причем f_1 и f_2 — одного и того же измерения, сводится к уравнению Бернулли после введения новой переменной $z = \frac{y}{x}$.

1188. $(x + 3y)\,dx + 2y\,dy + a(x + y)(x\,dy - y\,dx) = 0$.

1189. $y^2(x + a)\,dx + x(x^2 - ay)\,dy = 0$.

1190. $(x^3 - xy^2)\,dx + 2x^2y\,dy - (x\,dy - y\,dx) = 0$.

1191. Если R — сопротивление, L — коэффициент самоиндукции, а V — напряжение, то сила тока в цепи I удовлетворяет уравнению: $L\frac{dI}{dt} + RI = V$. Найти силу тока через t секунд после включения, если V постоянно, а при $t = 0$ сила тока была I_0.

1192. Тот же вопрос, что и в предыдущей задаче, при $V = V_0 \sin 2\pi nt$.

1193. Найти кривую, у которой площадь трапеции, образованной осями координат, касательной и ординатой в точке касания, равна a^2. Выделить кривую, проходящую через точку (a, a).

§ 7. Уравнение Риккати

Так называются уравнения, имеющие вид $y' + Py + Qy^2 + R = 0$. Если удается найти частное решение y_1, то подстановкой $y = y_1 + u$ такое уравнение приводится к уравнению Бернулли.

Найти общий интеграл следующих уравнений, имеющих частный интеграл вида $\frac{a}{x}$.

1194. $x^2y' = x^2y^2 + xy + 1$. **1195.** $y' + y^2 = 2x^{-2}$.
1196. $4y' + y^2 + 4x^{-2} = 0$. **1197.** $x^2y' + (xy - 2)^2 = 0$.

Уравнение, изучавшееся самим Риккати, имеет вид: $y' + Ay^2 = Bx^m$, где A, B и m — постоянные. После подстановки $y = \frac{u}{x}$ и $x^{m+2} = t$ оно переходит в такое: $tu' + \alpha u + \beta u^2 = \gamma t$. Последнее при $\beta = 0$ обращается в линейное, а при $\gamma = 0$ — в уравнение Бернулли. При $\alpha = -\frac{1}{2}$ уравнение можно переписать в таком виде: $-\sqrt{t}\left(\frac{\sqrt{t}}{u}\right)' + \beta = \gamma\left(\frac{\sqrt{t}}{u}\right)^2$, после чего оно легко интегрируется. Если же $\gamma\beta \neq 0$ и $\alpha \neq -\frac{1}{2}$, то уравнение можно преобразовать двумя путями:

I. Подстановкой $u = \frac{t}{a + v}$, где $a = \frac{1 + \alpha}{\gamma}$, оно преобразуется к виду:

$$tv' + (\alpha + 1)\,v + \gamma v^2 = \beta t.$$

II. Подстановкой $u = a + \frac{t}{v}$, где $a = -\frac{\alpha}{\beta}$, оно преобразуется к виду:

$$tv' + (\alpha - 1)\,v + \gamma v^2 = \beta t.$$

При $\alpha = \nu + \frac{1}{2}$, где ν — целое число, ряд подстановок указанных типов приводит к полному решению, но $\alpha = -\frac{1}{m + 2}$. Поэтому уравнение Риккати в узком смысле, т. е. уравнение $y' + Ay^2 = Bx^m$, интегрируется в конечном виде при $m = \frac{-4n}{2n + 1}$, где n — любое целое число, не исключая и отрицательных.

Решить уравнения:

1198. $xy' + 3y + y^2 = x^2$. **1199.** $xy' - 5y - y^2 = x^2$.
1200. $3xy' - 9y - y^2 = x^{\frac{2}{3}}$. **1201.** $5y' + y^2 = x^{-\frac{12}{5}}$.
1202. $y' + y^2 = x^{-4}$. **1203.** $y' + y^2 = -x^{-4}$.
1204. $y' - y^2 = x^{-\frac{8}{3}}$. **1205.** $y' - y^2 = -x^{-\frac{4}{3}}$.

§ 8. Уравнение Якоби

Уравнение Якоби имеет вид:

$$(Ax + By + C)\,dx + (A_1x + B_1y + C_1)\,dy + (A_2x + B_2y + C_2)\,(x\,dy - y\,dx) = 0.$$

Один из наиболее простых для запоминания путей его решения состоит в следующем. Подстановкой $x = \frac{\xi}{\zeta}$, $y = \frac{\eta}{\zeta}$ данное уравнение переводится в такое:

$$-s_1(\zeta\,d\eta - \eta\,d\zeta) + s_2(\zeta\,d\xi - \xi\,d\zeta) + s_3(\xi\,d\eta - \eta\,d\xi) = 0, \qquad (*)$$

где

$$-s_1 = A_1\xi + B_1\eta + C_1\zeta, \quad s_2 = A\xi + B\eta + C\zeta, \quad s_3 = A_2\xi + B_2\eta + C_2\zeta.$$

Уравнение (*) можно записать в виде равенства нулю определителя:

$$\begin{vmatrix} d\xi & d\eta & d\zeta \\ \xi & \eta & \zeta \\ s_1 & s_2 & s_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Чтобы удовлетворить ему, можно положить

$$\frac{d\xi}{dt} = s_1, \quad \frac{d\eta}{dt} = s_2, \quad \frac{d\zeta}{dt} = s_3, \qquad (**)$$

где t — новая вспомогательная переменная. Полученная система линейных уравнений решается сравнительно простыми методами, которым посвящен один из дальнейших параграфов. Решение этих уравнений дает три равенства с ξ, η, ζ и t. Присоединив к ним еще формулы $x = \frac{\xi}{\zeta}$, $y = \frac{\eta}{\zeta}$, получаем пять уравнений. Исключая из них ξ, η, ζ и t, найдем общий интеграл данного уравнения.

В простейшем и нередком случае решение уравнений (**) дается равенствами:

$$a\xi + b\eta + c\zeta = C_1 e^{\lambda_1 t}, \quad a_1\xi + b_1\eta + c_1\zeta = C_2 e^{\lambda_2 t}, \quad a_2\xi + b_2\eta + c_2\zeta = C_3 e^{\lambda_3 t}.$$

Отсюда следует:

$$(a\xi + b\eta + c\zeta)^{\lambda_2 - \lambda_3} (a_1\xi + b_1\eta + c_1\zeta)^{\lambda_3 - \lambda_1} (a_2\xi + b_2\eta + c_2\zeta)^{\lambda_1 - \lambda_2} = C,$$

где C — новая постоянная. Так как левая часть есть однородная функция нулевой степени, то выражения в скобках можно разделить на ζ, после чего получается общий интеграл уравнения Якоби в таком виде:

$$(ax + by + c)^{\lambda_2 - \lambda_3} (a_1 x + b_1 y + c_1)^{\lambda_3 - \lambda_1} (a_2 x + b_2 y + c_2)^{\lambda_1 - \lambda_2} = C.$$

Решить дифференциальные уравнения:

1206. $(x - y + 1)\,dx + (x - y - 1)\,dy + (x + y - 1)\,(x\,dy - y\,dx) = 0.$

1207. $(y - x - 1)(dx + dy) + (x + y + 1)(x\,dy - y\,dx) = 0.$

1208. $(x + 3y + 2)\,dx - (x - y - 2)\,dy + (x + y + 2)\,(x\,dy - y\,dx) = 0.$

1209. $(14x + 13y + 6)\,dx + (4x + 5y + 3)\,dy - (7x + 5y)\,(x\,dy - y\,dx) = 0.$

1210. $(7x - 8y + 5)\,dx + (7x - 8y)\,dy + 5(x + y)\,(x\,dy - y\,dx) = 0.$

1211. $(-x + 1)\,dx + (1 - y)\,dy + (x - y)(x\,dy - y\,dx) = 0.$

1212. Найти кривую, у которой отрезок касательной между точкой касания и осью Ox виден из точки $(0, 1)$ под углом 45°.

§ 9. Интегрирующий множитель

Если выражение $P\,dx + Q\,dy$ не есть полный дифференциал некоторой функции, то его можно сделать полным дифференциалом, помножив на некоторый множитель M. Последний должен удовлетворять уравнению в частных производных $P\frac{\partial M}{\partial y}-Q\frac{\partial M}{\partial x}=M\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)$. Если после умножения на M выражение $P\,dx+Q\,dy$ обращается в полный дифференциал функции u, то $\varphi(u)M$, где $\varphi(u)$ — любая интегрируемая функция, тоже будет интегрирующим множителем для $P\,dx+Q\,dy$. Таким образом, существует бесчисленное множество интегрирующих множителей. Тем не менее найти хотя бы один из них, вообще говоря, трудно. Исключение составляет случай, когда множитель имеет вид $M=f(u)$, где u — данная функция. В этом случае отношение величин $P\frac{\partial u}{\partial y}-Q\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}$ должно быть функцией одного u, а уравнение в частных производных для множителя M обращается в обыкновенное линейное уравнение первого порядка и может быть полностью решено. Как только множитель M для выражения $P\,dx+Q\,dy$ найден, уравнение $P\,dx+Q\,dy=0$ можно заменить уравнением $MP\,dx+MQ\,dy=0$. Так как в левой части стоит полный дифференциал, то последнее уравнение может быть проинтегрировано.

Найти интегралы следующих уравнений, имеющих множитель одного из видов $M=f(x)$ или $M=f(y)$.

1213. $(x^2+y)\,dx-x\,dy=0$.
1214. $(x^2+y^2)(x\,dy-y\,dx)=(a+x)x^4\,dx$.
1215. $(xy^2+y)\,dx-x\,dy=0$.
1216. $(2xy^2-y)\,dx+(y^2+x+y)\,dy=0$.
1217. $(1-x^2y)\,dx+x^2(y-x)\,dy=0$.
1218. $(x^2+y^2+2x)\,dx+2y\,dy=0$.
1219. $(x\cos y-y\sin y)\,dy+(x\sin y+y\cos y)\,dx=0$.

Интегрировать следующие уравнения с множителем одного из видов $M=f(x+y)$ или $M=f(xy)$:

1220. $(x^2+x^2y+2xy-y^2-y^3)\,dx+(y^2+xy^2+2xy-x^2-x^3)\,dy=0$.
1221. $(2x^3y^2-y)\,dx+(2x^2y^3-x)\,dy=0$.
1222. $xy^2\,dx+(x^2y-x)\,dy=0$.
1223. $x^2y^3+y+(x^3y^2-x)y'=0$.

Решить следующие уравнения с помощью множителей одного из видов: $M=f(x^2-y^2)$ или $M=f(x^2+y^2)$.

1224. $(x^2+y^2+1)\,dx-2xy\,dy=0$.
1225. $(y+x^2)\,dy+(x-xy)\,dx=0$.
1226. $\omega(x^2+y^2)x\,dx+\omega_1(x^2+y^2)y\,dy=0$.

Иногда интегрирующий множитель удается находить постепенно, представив величину $P\,dx+Q\,dy$ в виде суммы пар слагаемых такого же вида:

$$P\,dx+Q\,dy=(P_1\,dx+Q_1\,dy)+(P_2\,dx+Q_2\,dy)+\ldots+(P_n\,dx+Q_n\,dy).$$

Найдя множитель M_1 для первой суммы в правой части, получаем:

$$M_1(P\,dx+Q\,dy)=(M_1P_1\,dx+M_1Q_1\,dy)+(M_1P_2\,dx+M_1Q_2\,dy)+\ldots$$

Если при этом $M_1P_1\,dx+M_1Q_1\,dy$ оказалось равным du, где u — известная функция, то стараются выбрать $M_2=\varphi(u)$ так, чтобы в равенстве

$$M_1M_2(P\,dx+Q\,dy)=\varphi(u)\,du+(M_1M_2P_2\,dx+M_1M_2Q_2\,dy)+\ldots$$

второе слагаемое в правой части стало полным дифференциалом. Первое слагаемое при этом остается полным дифференциалом. Продолжая дальше подобным образом, мы достигнем того, что вся правая часть станет полным дифференциалом. Так, например, в уравнении $x\,dx+y\,dy+x(x\,dy-y\,dx)=0$ первые два слагаемых равны $\frac{1}{2}du$, где $u=x^2+y^2$. Поэтому, умножая на $\varphi(u)$, пишем уравнение:

$$\frac{1}{2}\varphi(u)\,du+\varphi(u)\,x^3\cdot\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2}=0.$$

Правая часть будет полным дифференциалом, если $\varphi(u)\,x^3$ будет функцией дроби $v=\frac{y}{x}$. Это будет при $\varphi(u)=\frac{1}{\sqrt{u^3}}$. Это уравнение принимает тогда вид: $\frac{du}{2u\sqrt{u}}+\frac{dv}{\sqrt{(v^2+1)^3}}=0$ и без труда интегрируется.

Найти интегралы уравнений:

1227. $(x^2+y^2+y)\,dx-x\,dy=0$.

1228. $x\,dy+y\,dx+y^2(x\,dy-y\,dx)=0$.

1229. $y(x^2+y^2)\,dx+x(x\,dy-y\,dx)=0$.

1230. $y^2(x+a)\,dx+x(x^2-ay)\,dy=0$.

1231. $2x\,dy+y\,dx+xy^2(x\,dy+y\,dx)=0$.

1232. $x\,dy-2y\,dx+xy^2(2x\,dy+y\,dx)=0$.

1233. Доказать, что для однородного уравнения $M\,dx+N\,dy=0$ величина $\frac{1}{Mx+Ny}$ есть интегрирующий множитель.

1234. Доказать теорему: если уравнение $M\,dx+N\,dy=0$ однородное, а $M\,dx+N\,dy$ есть полный дифференциал, то общий интеграл уравнения можно написать в таком виде: $Mx+Ny=C$.

§ 10. Уравнения Эйлера

Если уравнение $P\,dx+Q\,dy=0$ имеет два интегрирующих множителя M_1 и M, отношение которых отлично от постоянной, то равенство $\frac{M_1}{M}=C$ дает общий интеграл уравнения. Если общий интеграл можно представить в двух видах: $u(x,y)=C$, $v(x,y)=C_1$, где C и C_1 — произвольные постоянные, то $v=\varphi(u)$. Так уравнение $\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}=0$ по умножении на xy переходит в $y\,dx+x\,dy=0$ и, значит, имеет два множителя 1 и xy. Поэтому его общий интеграл есть $xy=C$. С другой стороны, его общий интеграл есть также $\ln x+\ln y=C_1$. Поэтому $\ln x+\ln y=\varphi(xy)$. При $y=1$ получаем: $\ln x=\varphi(x)$. Отсюда получаем основное равенство теории логарифмов:

$\ln x + \ln y = \ln(xy)$. Несколько сложней получаются подобные результаты для уравнения

$$\frac{dx}{x^2+1} + \frac{dy}{y^2+1} = 0,$$

которое имеет один интегрирующий множитель $M = 1$. Чтобы найти другой, обозначим левую часть через ω и умножим ее на $(x^2+1)(y^2+1)$, после чего получим $(x^2+1)(y^2+1)\omega = y^2\,dx + x^2\,dy + d(x+y)$. С другой стороны, замечаем, что $(x+y)\,d(xy) = y^2\,dx + x^2\,dy + xy\,d(x+y)$. Поэтому

$$(x^2+1)(y^2+1)\omega = (x+y)\,d(xy) + (1-xy)\,d(x+y).$$

Деля на $(1-xy)^2$, получаем:

$$\frac{(x^2+1)(y^2+1)}{(1-xy)^2}\omega = \frac{(1-xy)\,d(x+y) - (x+y)\,d(1-xy)}{(1-xy)^2} = d\frac{x+y}{1-xy}.$$

Данное уравнение $\omega = 0$ эквивалентно такому: $d\frac{x+y}{1-xy} = 0$. Его общий интеграл $\frac{x+y}{1-xy} = C$. С другой стороны, ясно, что общий интеграл уравнения ω есть $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = C_1$. Поэтому $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \varphi\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$. При $y = 0$ находим: $\operatorname{arctg} x = \varphi(x)$. Следовательно,

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}.$$

Найти алгебраическую форму интегралов следующих четырех уравнений:

1235. $\dfrac{dx}{a+2bx+cx^2} + \dfrac{dy}{a+2by+cy^2} = 0.$

1236. $\dfrac{dx}{a+2bx+cx^2} = \dfrac{dy}{a+2by+cy^2}.$

1237. $\dfrac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} + \dfrac{dy}{\sqrt{a+by+cy^2}} = 0.$

1238. $\dfrac{dx}{x\sqrt{a+bx+cx^2}} = \dfrac{dy}{y\sqrt{a+by+cy^2}}.$

1239. Доказать, что общий интеграл уравнения

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} = 0$$

может быть представлен в форме

$$y\sqrt{1-x^4} + x\sqrt{1-y^4} = C(1+x^2y^2).$$

1240. Доказать, что частный интеграл того же уравнения, удовлетворяющий условию $y = 1$ при $x = 0$, выражается уравнением:

$$x^2y^2 + x^2 + y^2 = 1.$$

1241. На дуге лемнискаты $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ рассматриваются точки $M(\varphi, r)$ и $M_1(\varphi_1, r_1)$ такие, что дуги OM и AM_1 равны, где $O\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$, $A(0, a)$. Доказать, что $\cos\varphi \cos\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

1242. Уравнение $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0$ имеет общий интеграл $\arcsin x + \arcsin y = C$. Установить, что оно имеет также алгебраический интеграл

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = C_1.$$

1243. Полагая $x = \sin\varphi$, $y = \sin\psi$, $\sqrt{1-x^2} = \cos\varphi$, $\sqrt{1-y^2} = \cos\psi$, с помощью предыдущего результата доказать теорему сложения для синусов:

$$\sin\varphi\cos\psi + \sin\psi\cos\varphi = \sin(\varphi + \psi).$$

1244. При изучении уравнения

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = 0$$

положить $\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)} = R(x)$, $dx = R(x)\,dt$, $dy = -R(y)\,dt$ и доказать равенства

$$yx' - xy' = yR(x) + xR(y),$$
$$yx' + xy' = yR(x) - xR(y),$$
$$yx'' - xy'' = 2k^2xy(x^2 - y^2).$$

1245. Доказать, что общий интеграл уравнения предыдущей задачи можно написать в таком виде:

$$y\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)} + x\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)} = C(1-k^2x^2y^2).$$

1246. Определив функцию $x = \operatorname{sn} u$ равенством

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

и введя функции $\sqrt{1-x^2} = \operatorname{cn} u$, $\sqrt{1-k^2x^2} = \operatorname{dn} u$, доказать равенство:

$$\frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v + \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v} = \operatorname{sn}(u+v).$$

1247. Доказать, что общий интеграл уравнения

$$\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-\lambda x)}} + \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)(1-\lambda y)}} = 0$$

можно представить в таком виде:

$$\sqrt{y(1-x)(1-\lambda x)}+\sqrt{x(1-y)(1-\lambda y)}=C(1-\lambda xy).$$

1248. Доказать, что общий интеграл уравнения

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi}}+\frac{d\psi}{\sqrt{\cos\psi}}=0$$

можно написать в таком виде:

$$\sqrt{\cos\varphi}-\sqrt{\cos\psi}=C\sin\frac{\varphi-\psi}{2}.$$

§ 11. Уравнения, не решенные относительно y'

Один из способов решения таких уравнений состоит в том, что данное уравнение сначала разрешают относительно y'. Таким способом можно решить уравнения 1249—1256.

Решить уравнения:

1249. $yy'+y'^2=x^2+xy$. **1250.** $xy'=\sqrt{1+y'^2}$.

1251. $x^2y'^2+3xyy'+2y^2=0$.

1252. $xy'^2+2yy'-x=0$. **1253.** $x^3+y'^2=x^2$.

1254. $(xy'-y)^2=2xy(1+y'^2)$.

1255. $x^2y'^2-2xyy'+y^2=x^2y^2-x^4$.

1256. $(xy'-y)(xy'-2y)+x^2=0$ (здесь можно положить $y=ux$ и потом $x=e^t$).

Найти интегралы следующих двух уравнений, опираясь на то, что в них величина y' постоянна:

1257. $y'^3-3y'+1=0$.

1258. $y'=e^{y'}\sin y'$.

Если уравнение имеет один из видов, $f(x, y')=0$ или $f(y, y')=0$, то нередко бывает удобно принять y' за параметр или за какую-нибудь функцию параметра. Если положить $y'=p$, а из уравнения $f(x, y')=0$ получается $x=\varphi(p)$, то $dx=\varphi'(p)\,dp$. Поэтому $dy=p\,dx=p\varphi'(p)\,dp$. Отсюда и из предыдущего получаются параметрические выражения x и y через p:

$$x=\varphi(p),\quad y+C=\int p\varphi'(p)\,dp.$$

Подобно этому решается и уравнение типа $f(y, y')=0$.

Решить уравнения:

1259. $x=ay'+by'^2$. **1260.** $y=y'^2+2y'^3$.

1261. $y = y' \ln y'$.

1262. $y'^2 - 2xy' - 1 = 0$.

1263. $x^{y'} = y'^x$.

1264. $x^3 + y'^3 = axy'$.

(В последних двух задачах следует и x и y' выразить через вспомогательный параметр.)

Для интегрирования уравнения $F(x, y, y') = 0$ бывает полезно разрешить его относительно y. Если при этом получится $y = \varphi(y')x + \psi(y')$, то уравнение интегрируется. Здесь приходится разбирать три случая:

1) $y = y'x + \psi(y')$ (уравнение Клеро). Его общий интеграл имеет вид $y = Cx + \psi(C)$. Кроме того, уравнение может иметь еще особый интеграл, который получается исключением p из уравнений $y = px + \psi(p)$ и $x + \psi'(p) = 0$.

2) $y = \varphi(y')x + \psi(y')$, где $\varphi(y') \neq y'$ (уравнение Лагранжа). Если положить $y' = p$ и принять x за функцию, то уравнение обращается в линейное:

$$[\varphi(p) - p]\frac{dx}{dp} + x\varphi'(p) + \psi'(p) = 0.$$

Кроме того, уравнение может иметь особые интегралы вида $y = \varphi(C)x + \psi(C)$, где C — корень уравнения $C = \varphi(C)$.

3) $y = xy' + x^\alpha\varphi(y')$ или $y = xy' + y^\alpha\varphi(y')$ таким же способом как во втором случае приводится к уравнению Бернулли.

Решить уравнения:

1265. $y = xy' + y'^2$.

1266. $y = xy' + y' - y'^2$.

1267. $y = xy' - a\sqrt{1 + y'^2}$.

1268. $y^2 - 2xyy' + (1 + x^2)y'^2 = 1$.

1269. $x = \dfrac{y}{y'} + \dfrac{1}{y'^2}$.

1270. $y'^3 - 3y' = y - x$.

1271. $2y(y' + 2) = xy'^2$.

1272. $y = xy'^2 + y'^2$.

1273. $y = x(1 + y') + y'^2$.

1274. $y = 2xy' - y'^2$.

1275. $yy' = 2xy'^2 + 1$.

1276. Найти кривую, у которой касательная образует на осях отрезки, сумма которых равна $2a$.

1277. Найти кривую, у которой длина отрезка касательной между осями равна a.

1278. Найти кривые, у которых произведение расстояния касательных до двух данных точек постоянное.

1279. Найти кривую, касательная к которой образует с осями треугольник площади $2a^2$.

1280. Найти интегральную кривую уравнения $y'^2 + 2xy' + 2y = 0$, которая пересекает ось Oy под углом 45°.

§ 12. Особенные решения уравнений

Если интеграл уравнения имеет вид $f(x, y, C)=0$, то особенное решение может получаться исключением C из уравнений $f(x, y, C)=0$ и $\frac{\partial f}{\partial C}=0$. Может случиться, однако, что эти уравнения несовместны или не дают вещественного решения. Может случиться также, что уравнение, полученное указанным способом, не дает особенного решения. Если само уравнение имеет вид $f(x, y, y')=0$, то особенное решение может получаться также исключением y' из уравнений $f(x, y, y')=0$, $\frac{\partial f}{\partial y'}=0$.

Ввиду возможности посторонних решений всегда требуется проверка по самому заданному дифференциальному уравнению.

Найти особенные решения уравнений:

1281. $y=xy'+y'+y'^2$. **1282.** $(xy'-y)^2=x^3(2y-xy')$.

1283. $(xy'+y)^2+3x^5(xy'-2y)=0$.

1284. $2xy\left(1+y'^2\right)-(xy'+y)^2=0$.

1285. $x^2y'^2-2(xy-2)y'+y^2=0$.

1286. $(y-xy')(ay'-b)=aby'$.

1287. $y'^2-yy'+e^x=0$. **1288.** $y=xy'+\sqrt{1-y'^2}$.

1289. $y'^2-2xy'\sqrt{y}+4y\sqrt{y}=0$.

1290. $xy^2y'^2-y^3y'+a^2x=0$.

§ 13. Задачи на траектории

Ортогональной траекторией семейства $f(x, y, a)=0$ называется линия, пересекающая кривые семейства под прямым углом. Чтобы получить дифференциальное уравнение данного семейства, надо исключить a из уравнений: $f(x, y, a)=0$, $\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'=0$. Чтобы получить дифференциальное уравнение траекторий, надо исключить a из уравнений:

$$f(x, y, a)=0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\left(-\frac{1}{y'}\right)=0.$$

Ортогональные траектории встречаются в ряде вопросов физики.

Найти ортогональные траектории следующих семейств линий:

1291. Парабол $y=ax^2$.

1292. Кривых $y=ax^\sigma$ при данном σ.

1293. Эллипсов $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\lambda$ при данных a и b.

1294. Эллипсов $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ при данном a.

1295. Кривых $x^{\sigma}+y^{\sigma}=a^{\sigma}$.

1296. Софокусных эллипсов $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$ при данном c.

Указание. Один из способов решения уравнения задачи — подстановка $x^2=\xi$, $y^2=\eta$.

1297. Кругов $(x-\lambda)^2+y^2=a^2$ при данном a.

1298. Парабол $(y-h)^2=2px$, скользящих без вращения вершиной по оси Oy.

1299. Парабол $(y-\eta)^2=2p(x-\xi)$, где $\eta^2+2p\xi=0$, передвигающихся без вращения, проходя через начало координат.

1300. Циссоид $(2a-x)y^2=x^3$.

1301. Лемнискат $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$. (Здесь лучше всего ввести полярные координаты.)

1302. Строфоид $x(x^2+y^2)=a(x^2-y^2)$.

1303. Парабол, у которых Ox—ось симметрии, Oy—директриса.

1304. Кругов, касающихся двух прямых $y=\pm ax$ при данном a.

1305. Кардиоид $r=a(1+\cos\varphi)$.

1306. Кривых $r^2(\pi-\varphi)=a^2\varphi$.

1307. $r^2=\ln\operatorname{tg}\varphi+C$.

1308. $r^{2n}-2a^nr^n\cos n\varphi+a^{2n}=c^{2n}$ при данных a и n.

1309. Найти эвольвенту параболы, т. е. ортогональную траекторию касательных к ней.

1310. Найти эвольвенту цепной линии $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$.

1311. Найти эвольвенту эвольвенты круга

$$x=2a(\cos t+t\sin t),\quad y=2a(\sin t-t\cos t).$$

1312. Найти кривые, пересекающие кардиоиды $r=a(1+\cos\varphi)$ при любых a под углом α.

1313. То же для кривых $r^2\cos 2\varphi=a^2$.

1314. То же для окружностей $r=a\cos\varphi$.

1315. Найти семейство кривых $r=af(\varphi)$ таких, чтобы каждая из кривых при повороте ее на любой угол β пересекала все остальные кривые семейства под углом α, где α — некоторая функция от β.

1316. Найти кривые, пересекающие под углом 45° касательные к кругу $x^2+y^2=a^2$.

1317. Найти кривые, пересекающие все образующие конуса $\frac{y}{z}=\varphi\left(\frac{x}{z}\right)$ под постоянным углом α.

1318. Найти линию, пересекающую под углом α меридианы параболоида вращения.

1319. Тот же вопрос для тора

$$(r-l)^2+z^2=a^2;\quad r^2=x^2+y^2;\quad l>a.$$

1320. Найти поверхность вращения около Oz, такую, чтобы проекции на плоскость xOy линий на поверхности, пересекающих меридианы под углом α, имели вид парабол с фокусом в начале координат.

1321. Найти линии наибольшего ската поверхности эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

1322. Найти линии наибольшего ската наклонного кругового цилиндра

$$x^2+(y-z\operatorname{tg}\alpha)^2=a^2.$$

1323. Найти линии наибольшего ската прямого кругового цилиндра, отклоненного от вертикали на угол α

$$x^2+(y\cos\alpha-z\sin\alpha)^2=a^2.$$

1324. Тот же вопрос, что и в предыдущей задаче, для наклонного параболического цилиндра

$$y^2=2p(x-z\operatorname{tg}\alpha).$$

§ 14. Разные задачи

Найти интегралы уравнений:

1325. $(x+y)(1-xy)\,dx+(x+2y)\,dy=0$.

1326. $(x^2+xy-ay)\,dx+ax\,dy=0$.

1327. $(y+\sqrt{x^2+y^2})\,dx=x\,dy$.

1328. $2x\,dx+(x^2+y^2+2y)\,dy=0$.

1329. $(x-y-4)\,dx=(x+y-2)\,dy$.

1330. $2xy'+y^2-1=0$.

1331. $(x^2+y^2)\,y'=xy$.

1332. $y=xy'+y'^2$.

1333. $xy'+2y=\sqrt{y}$.

1334. $xy'-y=y^2$.

1335. $(3x^2+6xy+y)\,dx+(3x^2+x-1)\,dy=0$.

1336. $x(x-1)\,y'-y=(x-1)^2$.

1337. $(y^2+2xy-x)\,y'=y^2$.

1338. $(y+xy')^2=x^2y'$.

1339. $xy'=2y+\sqrt{1+y'^2}$.

1340. $y'^3-4xyy'+8y^2=0$.

1341. $y^2(1+y'^2)=a(x+yy')$.

1342. $2y=x^2+xy'+y'^2$.

1343. $4y=(x+y')^2$.

1344. $4y=x^2+y'^2$.

1345. $2y=2x^2+4xy'+y'^2$.

1346. $x^2(y-xy')=yy'^2$.

1347. $x(1+y'^2)(y-xy')=2a^2$.

1348. $y'=m\ln x+\ln(xy'-y)$.

1349. $x^3y'^2+x^2yy'+a^3=0$.

1350. $(x^2-1)y'+y^2-2xy+1=0$.

1351. $y=(y'-\frac{1}{2}\sqrt{x})^3$.

1352. $(xy'-y)^2=y'^2-2\frac{y}{x}y'+1$.

1353. $(1+6y^2-3x^2y)y'=3xy^2-x^2$.

1354. $y^2-(y'^2+y'^3)xy+x^2y'^5=0$.

1355. $x^2+y=y'^2$

1356. $y'\sqrt{a^2+x^2}+y=\sqrt{a^2+x^2}-x$.

1357. $y-xy'=a(y^2+y')$.

1358. $[\sin(x+y)+x\cos(x+y)]\,dx+x\cos(x+y)\,dy=0$.

1359. $(x^2+1)y'+x\sin y\cos y-x(x^2+1)\cos^2 y=0$.

1360. $(x^2+y^2+a)yy'+(x^2+y^2-a)x=0$.

1361. $(x^2y^2+1)y+(xy-1)^2xy'=0$; $M(a;\ 1)$.

1362. $y'^2-yy'+e^x=0$.

1363. $(x^2-a^2)\,dx+2xy\,dy=0$; $M(2a;\ 3a)$.

1364. $y'=ay^n+bx^{\frac{n}{1-n}}$.

1365. $(x^2-y^2)\,dx+2xy\,dy=0$; $M(a,\ 3a)$.

1366. $(x^2-1)\,dx+(x^2y^2+x^3+x)\,dy=0$.

1367. $2(x^2y+\sqrt{1+x^4y^2})\,dx+x^3\,dy=0$.

1368. $xyy'=x^2y'+y^2$; $M(1;\ 1)$.

1369. $(x+2y^3)y'=y$. **1370.** $xyy'-y^2=(x+y)^2e^{-\frac{y}{x}}$.

1371. $y-(x+5)y'-y'^3=0$.

1372. $axy'+by=x^my^n(\alpha xy'+\beta y)$.

1373. $(x^n+y^2)\,dx-2xy\,dy=0$; $n>1$, $M(a;\ 0)$.

1374. Какую форму надо придать зеркалу, поверхность которого — поверхность вращения, чтобы оно все лучи, параллельные оси, отражало в начало координат?

1375. Найти кривые, у которых длина нормали равна расстоянию точки касания от начала координат.

1376. Найти такую кривую, чтобы расстояния начала координат до касательной и до нормали в переменной точке кривой находились в постоянном отношении.

1377. Найти кривую, у которой произведение отрезков, образованных касательной и нормалью на оси Ox, равно a^2.

1378. Найти кривую, у которой отношение расстояний нормали от двух данных точек есть величина постоянная.

1379. Найти кривую, у которой поднормаль в любой точке равна радиусу-вектору из начала координат в эту точку.

1380. Точка движется по оси Ox и тащит точку M, соединенную с ней стержнем длины a. Найти путь точки M (трактриса прямой).

1381. Тот же вопрос, но движущаяся точка описывает окружность $x^2+y^2=a^2$; начальное положение точки M — на полярной оси.

1382. Найти кривую, двигаясь по которой, без трения, тяжелая точка совершала бы равномерное движение по горизонтали.

1383. Найти кривую, скользя по которой тяжелая точка в равные промежутки времени снижалась бы на равные расстояния.

1384. Доказать, что функциональное уравнение $f(2x)=2f(x)$ имеет решение $f(x)=ax$, единственное среди функций, имеющих производную при $x=0$.

1385. Найти кривые, у которых проекция ординаты на нормаль постоянна.

1386. Найти кривые, у которых начальная ордината касательной равна абсциссе точки касания.

1387. Найти кривые, у которых расстояние касательной от начала координат пропорционально длине нормали.

1388. Найти линии, у которых площадь сектора, ограниченного любыми радиусами-векторами, пропорциональна длине дуги, ограничивающей этот сектор.

1389. Найти линии, у которых середина отрезка касательной заключенного между осями координат, лежит на параболе $y^2=2px$.

1390. Найти кривые, для которых площадь треугольника, образованного осью Ox, радиусом вектором точки и касательной в ней, имеет постоянную величину Q.

1391. Найти линии, у которых отрезок оси Oy, заключенный между касательной и нормалью, имеет постоянную длину a.

1392. Найти кривые, у которых длина дуги связана с координатами ее конца так: $s=x-\frac{a^2}{y}$.

1393. Найти кривые, у которых длина дуги s пропорциональна квадрату абсциссы.

1394. Найти кривые, у которых $s=f(y)$, где $f(y)$ — данная функция.

1395. Найти кривую, у которой $s^2=8ay$.

1396. Найти кривую, у которой $s^2=y^2-a^2$.

1397. Найти кривую, у которой $y=ae^{\frac{s}{a}}$.

1398. Найти кривые, у которых центр тяжести дуги, взятой от начала координат до любой точки, имел бы абсциссу, равную $\frac{1}{n}$ абсциссы конца дуги.

1399. Найти угловые коэффициенты касательных, проведенных в точке (1; 2) к двум интегральным кривым уравнения $y'^2=$

$=y^2-2x+x^2$, проходящим через эту точку. Показать, что радиус кривизны каждой из этих кривых в этой точке равен 4.

1400. Найти геометрическое место точек, обладающих свойством, что две интегральные кривые уравнения $xy'^2-yy'+1=0$, проходящие через эти точки, пересекаются:

1) под прямым углом;

2) под углом 45°.

1401. Найти кривую, которая после поворота около начала координат на любой угол α и соответствующего пропорционального изменения обеих координат, совместилась бы с кривой до поворота.

1402. Найти плоскую кривую, которая после любого растяжения ординат в k раз, оказалась бы себе подобной, т. е. совпадала бы с кривой, полученной из данной, пропорциональным изменением обеих координат в λ раз.

1403. Найти асимптотические линии коноидов $z=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$. Соприкасающаяся плоскость у асимптотических линий совпадает с касательной плоскостью к поверхности.

1404. Найти линии кривизны гиперболического параболоида $az=xy$. Линии кривизны поверхности удовлетворяют уравнению:

$$\frac{(1+p^2)\,dx+pq\,dy}{r\,dx+s\,dy}=\frac{pq\,dx+(1+q^2)\,dy}{s\,dx+t\,dy},$$

где

$$p=\frac{\partial z}{\partial x},\quad q=\frac{\partial z}{\partial y},\quad r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y},\quad t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

1405. Найти линии кривизны эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. (Монж.)

§ 15. Уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка

Следующие уравнения решаются непосредственным интегрированием соответствующей производной от y.

Решить уравнения:

1406. $y''=x+\sin x$. **1407.** $y'''\sin^4 x=\sin 2x$.

1408. $y^{\mathrm{IV}}=x$.

Общий интеграл уравнения $y^{(n)}=f(x)$ можно представить формулой:

$$y=\int\limits_a^x\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f(t)\,dt+C_0+C_1x+\ldots+C_{n-1}x^{n-1}.$$

1409. Найти общий интеграл уравнения $y^{\mathrm{IV}}=f(x)$, где $f(x)=x$ при $0<x<1$ и $f(x)=0$ вне этого промежутка.

1410. Найти интеграл уравнения $y^{\mathrm{IV}}=f(x)$, где $f(x)=|x|$ при $|x|<1$ и $f(x)=0$ при $|x|>1$, такой, чтобы при $x=0$ величины y, y', y'', y''' обращались соответственно в 0, 0, 0, 0.

Следующие уравнения сводятся к уравнению низшего порядка простыми подстановками: $y'=u$, или $y''=u$ и т. д.

1411. $(1+x^2)y''+y'^2+1=0$. **1412.** $xy''=y'\ln\frac{y'}{x}$.

1413. $y''^2=y'$. **1414.** $ay'''=y''$.

1415. $y'''+y''^2=0$. **1416.** $4y'+y''^2=4xy''$.

1417. $y''=(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}$. **1418.** $y'y'''-3y''^2=0$.

1419. $1+y'^2+xy'y''=ay''\sqrt{1+y'^2}$.

1420. $y'(1+y'^2)=ay''$. **1421.** $y'''=y''^3$.

1422. $y'''(1+y'^2)-3y'y''^2=0$.

Уравнения вида $f(y,\ y'\ y'')=0$ могут быть сведены к уравнению первого порядка заменой переменных: $y'=p$, откуда $dy=p\,dx$, $dp=y''\,dx$ и $y''=\frac{p\,dp}{dy}$.

1423. $yy''^2=1$. **1424.** $y''=ae^y$.

1425. $3y''=y^{-\frac{5}{3}}$. **1426.** $2(2a-y)y''=1+y'^2$.

1427. $1+y'^2=2yy''$. **1428.** $y^4-y^3y''=1$.

1429. $2y'^2=(y-1)y''$. **1430.** $y''(1+yy')=y'(1+y'^2)$.

1431. $yy''=y'^2$. **1432.** $2yy''+y'^2+y'^4=0$.

1433. $2yy''-3y'^2=4y^2$.

В следующих задачах требуется выбрать значения произвольных постоянных в общем интеграле так, чтобы получился частный интеграл, удовлетворяющий указанным условиям.

1434. Из общего интеграла уравнения $yy''+y'^2=1$ выделить интегральную кривую, проходящую через точку $(0,\ 1)$, касаясь в ней прямой $x+y=1$.

1435. В интеграле уравнения $yy'y''=y'^3+y''^2$ выделить интегральную кривую, проходящую через точку $(0,\ 0)$, касаясь в ней прямой $x+y=0$.

1436. Найти интеграл уравнения $y^3y''+1=0$, удовлетворяющий начальным данным $y=1$, $y'=0$ при $x=1$.

1437. Выделить интегральную кривую уравнения $y'^2+2yy''=0$, касающуюся прямой $y=x$ в точке $(1,\ 1)$.

1438. Найти интегральную кривую уравнения $2yy''-3y'^2=4y^2$, касающуюся прямой $y=1$ в точке $(0, 1)$.

1439. Найти интеграл уравнения $yy''+n^2y^2-ky'^2=0$, удовлетворяющий начальным данным $y=a$, $y'=0$ при $x=0$. При этом $0<k<1$.

Следующие уравнения легко интегрируются подстановками

$$y-xy'=u, \quad yy'=u \quad \text{и} \quad y\pm x=u.$$

1440. $yy''+y'^2=\dfrac{yy'}{\sqrt{1+x^2}}$.

1441. $y''^2-2xy''+x^2=y^2$.

1442. $x^4y''+(xy'-y)^3=0$.

1443. $x^3y''=(y-xy')^2$.

Из уравнений, допускающих понижение порядка, следует отметить уравнения $f(x, y, y', y'')=0$, однородные относительно y, y', y''. У них можно положить $y'=uy$, $y''=(u'+u^2)y$, после чего порядок понижается на единицу. В уравнениях $f(x, y, y', y'')=0$ или $f\left(x, y, \dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}\right)=0$, у которых левая часть не меняется при одновременном изменении x, dx, dy, d^2y в одно и то же число раз, бывает полезно вводить новую независимую переменную, полагая $x=e^t$.

Такими приемами решаются нижеследующие уравнения.

Решить уравнения:

1444. $x^2yy''-2x^2y'^2+xyy'+y^2=0$.

1445. $x^2yy''=(y-xy')^2$.

1446. $x^2(yy''-y'^2)+xyy'=y\sqrt{x^2y'^2+y^2}$.

1447. $xyy''+xy'^2-yy'=0$.

1448. Найти интеграл уравнения

$$x^4y''-(x^3+2xy)y'+4y^2=0,$$

введя новую функцию подстановкой $y=x^2u$.

Доказать, что можно привести к квадратурам уравнения:

1449. $f(x^2y'', xy', y)=0$, где f — однородная функция своих аргументов. (Бурле.)

1450. $x^3y''=F\left(\dfrac{y}{x}\right)f(xy'-y)$. Здесь удобно положить $x=e^t$, $y=ze^t$.

1451. $y''=(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}F\left(\dfrac{xy'-y}{\sqrt{1+y'^2}}\right)f(x^2+y^2)$. Здесь следует ввести полярные координаты.

1452. Проинтегрировать уравнение конических сечений:

$$40y'''^3-45y''y'''y^{\mathrm{IV}}+9y''^2y^{\mathrm{V}}=0.$$

Найти общий интеграл (или соответственно интеграл по начальным данным) следующих уравнений:

1453. $xyy'' + xy'^2 + ayy' + f(x) = 0.$

1454. $y'' + ay'^2 + b\sin y = 0.$

1455. $y'' + f(y)\,y'^2 + \varphi(x)\,y' = 0.$

1456. $y''^2 - 2xy'' - y' = 0.$

1457. $y''y^2 = -a^2;\quad x = 0,\quad y = R,\quad y' = 0.$

1458. $(1 + y^2)\,y'' + 2yy'^2 = y';\quad x = 1,\quad y = 0,\quad y' = 1.$

1459. $(x + a)\,y'' + xy'^2 = y';\quad x = 0,\quad y = 0,\quad y' = 1.$

Полное решение уравнений в частных производных представляет задачу более трудную, чем нахождение общего интеграла обыкновенных дифференциальных уравнений. Эта задача облегчается, если разыскивается интеграл уравнения в частных производных, представляющий функцию не от x и y в отдельности, а от данной функции их. Следующие четыре задачи дают примеры этого.

1460. Найти функцию $u = f(x^2 + y^2)$, удовлетворяющую уравнению Лапласа: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

1461. Найти общий вид функций $u = f(x^2 + y^2 + z^2)$, удовлетворяющих уравнению Лапласа от трех переменных: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$

1462. Найти общий вид функций $u = f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$, удовлетворяющих бигармоническому уравнению:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial u^4}{\partial y^4} = 0.$$

Замечание. Уравнение Лапласа имеет исключительное значение в ряде отделов математической физики. Бигармоническое уравнение имеет большое значение в теории упругости.

1463. Поверхности, у которых средняя кривизна равна нулю, называются минимальными. Координаты их точек удовлетворяют уравнению:

$$(1 + p^2)\,t - 2pqs + (1 + q^2)\,r = 0,$$

где

$$p = \frac{\partial z}{\partial x},\quad q = \frac{\partial z}{\partial y},\quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y},\quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

У поверхностей вращения вокруг оси Oz должно быть $z = f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$. Найти минимальные поверхности вращения. (Монж.)

1464. Найти плоские кривые, у которых радиус кривизны пропорционален нормали. Рассмотреть случаи, когда коэффициент пропорциональности μ равен числам ± 1 и ± 2.

1465. Найти плоские кривые, у которых радиус кривизны пропорционален кубу нормали.

1466. Найти кривые, у которых радиус кривизны пропорционален радиусу-вектору из начала координат в точку кривой.

1467. У каких кривых, кроме окружностей, радиус кривизны равен радиусу-вектору из начала координат?

1468. Определить форму равновесия нерастяжимой нити, на которую действует нагрузка так, что на каждую единицу горизонтальной проекции нагрузка одинакова (цепи цепных мостов).

1469. Найти форму равновесия однородной нерастяжимой нити под действием ее веса (цепная линия).

Найти кривые, у которых радиус кривизны есть данная функция $f(\alpha)$ угла α, образуемого касательной с осью Ox:

1470. $f(\alpha) = a$.

1471. $f(\alpha)\sin^3\alpha = a$.

1472. $f(\alpha)\cos^2\alpha = a$.

1473. $f(\alpha) = ae^{m\alpha}$.

1474. $f(\alpha) = a\alpha$.

1475. $f(\alpha) = a\sin\alpha$.

1476. $f(\alpha) = a\sin m\alpha$.

1477. $f(\alpha)(1 - e^2\cos^2\alpha)^{\frac{3}{2}} = p$; $0 < e < 1$.

Найти кривые, у которых длина дуги s есть данная функция угла α, образуемого касательной в конце дуги с осью Ox:

1478. $s = a\alpha$.

1479. $s = a\operatorname{tg}\alpha$.

1480. $s = ae^{m\alpha}$.

1481. $2s = a\alpha^2$.

1482. $s = a\cos\alpha$.

1483. $s = a\cos m\alpha$.

В следующих задачах найти кривые, у которых радиус кривизны R есть данная функция длины дуги s.

1484. $s^2 = a(R - a)$.

1485. $R = ms$.

1486. $R^2 + s^2 = a^2$.

1487. $R^2 = 2as$.

Найти кривые, у которых существует указанное ниже соотношение между соответствующими радиусами кривизны самой кривой R и ее эволюты R_1.

1488. $R^2 + R_1^2 = a^2$.

1489. $R_1^2 = 2aR$.

1490. $\frac{R^2}{a^2} + \frac{R_1^2}{b^2} = 1$.

1491. Найти кривую, дуга которой, считаемая от некоторой начальной точки, равна расстоянию касательной в конце дуги от начала координат.

§ 16. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами и уравнения, приводящиеся к ним

Написать общие интегралы линейных уравнений с постоянными коэффициентами:

1492. $y'' - y = 0.$

1493. $y'' - 5y' + 6y = 0.$

1494. $y'' + 3y' + 2y = 0.$

1495. $y'' + 2y' + y = 0.$

1496. $y'' - 4y' + 4y = 0.$

1497. $y'' + 2y' + 5y = 0.$

1498. $y'' + 4y' + 13y = 0.$

1499. $y'' + y' + y = 0.$

1500. $y'' + y = 0.$

1501. $y''' - 8y = 0.$

1502. $y^{IV} - 16y = 0.$

1503. $y^{IV} + 4y = 0.$

1504. $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0.$

1505. $y''' - 5y'' + 17y' - 13y = 0.$

1506. $y^{IV} - 5y'' + 4y = 0.$

1507. $y^{IV} + 5y'' + 4y = 0.$

1508. $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0.$

1509. $y^{IV} + 2y''' + 3y'' + 2y' + y = 0.$

1510. $y^{IV} + 4y''' + 6y'' + 4y' + y = 0.$

1511. $y^{IV} - y''' + y'' - y' + 12y = 0.$

1512. $y^{VII} + 3y^{VI} + 3y^{V} + y^{IV} = 0.$

Найти частный интеграл, определяемый указанными требованиями, для следующих дифференциальных уравнений:

1513. $y^{IV} + a^4 y = 0$ при $x = 0$, $y = 0$, $y' = 0$, $y'' = 0$, $y''' = 1$.

1514. $y^{IV} + 4y = 0$ при $x = 0$, $y = 0$, $y' = 0$;
при $x = \pi$, $y = 0$, $y' = a$.

1515. $y^{IV} + 4y = 0$ при $x = 0$, $y = 0$, $y' = 1$;
при $x = +\infty$, $y = 0$.

1516. $y^{IV} - a^4 y = 0$ при $x = 0$, $y = 0$, $y' = 0$;
при $x = l$, $y'' = 0$, $y''' = b$.

1517. При каких значениях a, будут существовать отличные от нуля решения предыдущей задачи в случае задания $b = 0$.

Найти общие интегралы следующих неоднородных линейных уравнений с постоянными коэффициентами (методом неопределенных коэффициентов).

1518. $y'' + a^2 y = e^x.$

1519. $y'' - y = xe^x + e^{2x}.$

1520. $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}(x^2 + x).$

1521. $y''' - 4y' = xe^{2x} + \sin x + x^2.$

1522. $y'' + 2y' + y = e^{-x}\cos x + xe^{-x}$.

1523. $y'' + 2y' + 2y = e^{-x}\cos x + xe^{-x}$.

1524. $y'' - 7y' + 6y = \sin x$.

1525. $y'' - 2y' + y = \sin x + e^{-x} + e^{x}$.

1526. $y'' + y = 2\sin x \sin 2x$.

1527. $y'' - a^2y = e^{bx}$ при $b \neq a$ и $b = a$.

1528. $y'' + a^2y = \sin bx$ при $b \neq a$ и $b = a$.

1529. $y^{IV} + 2y''' + 5y'' + 8y' + 4y = \cos x + 40e^{x}$.

1530. $y'' + 4y' + 20y = a\sin 4x$.

1531. $y''' - 2y' + 4y = e^{-x}\cos x + e^{x}\sin x$.

1532. $y''' + y'' - y' + 15y = \sin 2x$.

1533. $y'' + n^2y = \sin^3 nx$.

1534. $y'' + n^2y = ax\sin mx + b\cos mx; \quad m \neq n$.

1535. $y'' + n^2y = ax\sin nx + b\cos nx$.

Следующие уравнения решаются способом Лагранжа.

Решить уравнения:

1536. $y'' + y = \operatorname{tg} x$.

1537. $y'' - y = \dfrac{2e^x}{e^x - 1}$.

1538. $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$.

1539. $y'' + y = \dfrac{1}{\cos 2x\sqrt{\cos 2x}}$.

1540. $y'' - 6y' + 9y = \dfrac{9x^2 + 6x + 2}{x^3}$.

1541. $y'' - 6y' + 9y = 36\sqrt{x} - \dfrac{12x + 1}{x\sqrt{x}}$.

К уравнениям с постоянными коэффициентами сводятся уравнения Эйлера

$$x^n y^{(n)} + p_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + p_n y = f(x).$$

Для этого достаточно ввести новое независимое переменное по формуле $x = e^t$. Еще проще решать однородные уравнения Эйлера с помощью характеристического уравнения. Ищем решение уравнения, полагая $y = x^\sigma$. Подставляя в уравнение и сокращая на x^σ, для показателя σ получаем уравнение:

$$\sigma(\sigma - 1)\ldots(\sigma - n + 1) + p_1\sigma(\sigma - 1)\ldots(\sigma - n + 2) + \ldots + p_n = 0.$$

После этого общий интеграл y находится в виде суммы слагаемых, соответствующих корням уравнения для σ. Каждому вещественному корню σ кратности ν соответствует слагаемое $x^\sigma P_\nu(\ln x)$, где P_ν — полином степени $\nu - 1$ с произвольными коэффициентами. Каждой паре мнимых сопряженных корней $\sigma = \alpha \pm \beta i$, имеющих кратность μ, соответствует слагаемое

$$x^\alpha [Q_\mu(\ln x)\cos\beta\ln x + R_\mu(\ln x)\sin\beta\ln x],$$

где Q_μ и R_μ — полиномы степени $\mu - 1$ с произвольными коэффициентами.

Замечание. Более общее уравнение Эйлера:

$$(ax+b)^n y^{(n)} + p_1(ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + p_n y = f(x)$$

сводится к только что рассмотренному простейшему случаю подстановкой $ax+b=t$.

Проинтегрировать уравнения:

1542. $x^2y''+xy'+y=0$.

1543. $x^2y''+xy'-y=0$.

1544. $x^2y'''=2y'$.

1545. $x^3y'''+xy'-y=0$.

1546. $x^3y'''+2x^2y''-xy'+y=0$.

1547. $x^2y''+xy'+y=x$.

1548. $x^2y''-xy'+y=2x$.

1549. $x^2y''-2xy'+2y=2x^3-x$.

1550. $x^3y'''-x^2y''+2xy'-2y=x^3+3x$.

1551. $(3x+2)^2y''+7(3x+2)y'=-63x+18$.

1552. $x^2y''-4xy'+6y=2ax+\dfrac{12b}{x}$.

1553. $x^4y^{\mathrm{IV}}+6x^3y'''+5x^2y''-xy'+y=x^2$.

1554. $(x+1)^3y''+3(x+1)^2y'+(x+1)y=6\ln(x+1)$.

1555. $x^3y''-x^2y'-3xy+16\ln x=0$.

1556. $(x+1)^2y''+(x+1)y'+y=x^2+2\sin\ln(1+x)$.

1557. $x^2y''+xy'-y=\dfrac{x}{(x+1)^2}-\ln(x+1)$.

1558. $x^4y'''+2x^3y''=1$ при условии:

если $x=1$, то $y=0$, $y'=0$, $y''=0$.

В следующих задачах требуется найти частный интеграл уравнения, удовлетворяющий дополнительным условиям:

1559. $y''-(\alpha+\beta)y'+\alpha\beta y=Ae^{\gamma x}$; $\alpha\neq\beta\neq\gamma$

при $x=0$, $y=a$, $y'=b$.

1560. $y''-(\alpha+\beta)y'+\alpha\beta y=Ae^{\alpha x}$; $\alpha\neq\beta$

при $x=0$, $y=a$, $y'=b$; получить нужное решение:

1) из общего интеграла,
2) предельным переходом из решения предыдущей задачи.

1561. $y''-2\alpha y'+\alpha^2y=Ae^{\alpha x}$;

при $x=0$, $y=a$, $y'=b$.

Получить нужное решение: 1) из общего интеграла, 2) предельным переходом из решения предыдущей задачи.

1562. $y'''-5y''+8y'-4y=e^{2x}+e^{3x}$

при $x=0$, $y=1$, $y'=0$, $y''=0$.

1563. $y'' + n^2 y = h \sin^2 nx$

при $x = 0$, $y = 0$, $y' = 0$.

1564. $y'' + 4n^2 y = h \sin^2 nx$·

при $x = 0$, $y = a$, $y' = 0$.

1565. $y''' + y = 1$

при $x = 0$, $y = 0$, $y' = 0$, $y'' = 0$.

1566. $y^{IV} + y = 1$

при $x = 0$, $y = 0$, $y' = 0$; при $x = \infty$ y конечная величина.

1567. Найти интеграл уравнения $y^{IV} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = \frac{\pi}{2} + 4\cos x$, удовлетворяющий условиям $y = y' = 0$ при $x = 0$ и при $x = \pi$.

1568. Найти непрерывную с непрерывной производной при $0 < x < 2$ функцию от x, удовлетворяющую при $x < 1$ уравнению $y'' - y = 0$, а при $x > 1$ уравнению $y'' - 4y = 0$ и такую, чтобы $y = 0$ и $y' = 1$ при $x = 0$.

1569. Тело падает с высоты h под действием силы тяжести $f_1 = -mg$; на него действуют силы трения, пропорциональной скорости: $f_2 = -kv$. Начальная скорость равна нулю. Найти формулу для высоты y через t секунд от начала движения.

1570. Тело массы m скользит по плоскости с углом наклона α под действием силы тяжести. Сила трения выражается формулой $f = -lp - kv$, где p — нормальное давление, v — скорость тела, l и k — постоянные.

Найти зависимость пройденного пути от времени.

1571. Тело массы m подвешено на пружине и находится в равновесии. Затем пружина вытянута на длину h силой kh и тело отпущено. Определить дальнейшее движение тела, считая, что сила сопротивления среды пропорциональна скорости $f = -nv$.

1572. По закону Ньютона при движении тела по оси Ox $m\frac{d^2x}{dt^2} = f$, где f — сила, действующая на тело. Найти движение тела, на которое действуют одновременно две силы: 1) сила упругости f_1, пропорциональная отклонению от положения равновесия: $f_1 = -a^2 x$; 2) сила трения f_2, пропорциональная скорости: $f_2 = -k\frac{dx}{dt}$.

1573. При тех же обозначениях, что и в задаче 1572, найти движение тела с массой m, на которое действуют две силы: $f_1 = -a^2 x$ и $f_2 = b \sin nt$. Рассмотреть случаи $n \neq \frac{a}{\sqrt{m}}$ и $n = \frac{a}{\sqrt{m}}$. При $t = 0$ величины x и $\frac{dx}{dt}$ равны 0.

1574. Тело массы m скользит по горизонтальной плоскости под действием толчка, давшего начальную скорость v_0. На тело действует сила трения, равная $-km$. Найти расстояние, какое тело способно пройти.

1575. На тело единичной массы действуют две силы: $f_1=-k^2x$ и $f_2=-fk^2\operatorname{sign}x'$, равная fk^2 и направленная обратно скорости. Начальная скорость $x'=0$, а начальное расстояние от начала $x_0=nf$. Найти движение тела.

1576. Струна длиной l расположена по оси Ox между точками $(0,\ 0)$ и $(l,\ 0)$ и колеблется в плоскости xOy. Отклонение y в точке x и в момент t удовлетворяет уравнению: $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$. Найти те виды колебаний при которых $y=u(x)\sin bt$, где b характеризует частоту колебаний. Концы струны закреплены: $y=0$ при $x=0$ и $x=l$ при любом t.

1577. При установившемся распределении тепла в однородном теле температура u удовлетворяет уравнению Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$. Внутренность цилиндрической трубки с однородными стенками наполнена жидкостью с температурой t_1, а снаружи — жидкостью с температурой t_2. Найти распределение температуры в стенках.

1578. Тот же вопрос, что и в предыдущей задаче, для слоя между концентрическими шарами с радиусами r_1 и r_2.

1579. Балка расположена по оси Ox от точки $(0,\ 0)$ до точки $(l,\ 0)$. Ее прогиб в точке x равен y и удовлетворяет уравнению $y^{\mathrm{IV}}=af(x)$, где $f(x)$ нагрузка, a — коэффициент, зависящий от вещества балки и формы поперечного сечения. Найти прогиб балки при $f(x)=1$, если балка заделана на концах ($y=y'=0$ при $x=0$ и $x=l$).

1580. Стержень между теми же точками, что и в предыдущей задаче, вращается вокруг оси Ox. Его отклонение y от оси Ox, если оно возможно, удовлетворяет уравнению $y^{\mathrm{IV}}-a^4y=0$, где a зависит от скорости и свойств стержня. При $x=0$ и $x=l$ величины y и y'' равны нулю. При каких a отклонение возможно?

1581. Упругая тонкая плита расположена в плоскости xOy и изогнута действующими на нее распределенными усилиями интенсивности $p(x,\ y)$. Прогиб w в точке $(x,\ y)$ (отклонение от плоскости xOy) удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)=p(x,\ y)$$

(постоянная D — жесткость плиты).

Определить прогиб $w(r)$ для круглой равномерно нагруженной плиты радиуса a, с заделанным краем. На заделанном краю $w=0$ и $\frac{dw}{dr}=0$, в центре плиты w и $\frac{d^2w}{dr^2}$ конечны; $\left(r=\sqrt{x^2+y^2}\right)$.

1582. Решить предыдущую задачу для равномерно нагруженной круглой плиты радиуса a, опертой по краю. На опертом краю $r=a$ граничные условия имеют вид: $w=0$ и $\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{\nu}{r}\frac{dw}{dr}=0$ (постоянная ν — коэффициент Пуассона); в центре плиты условия прежние.

§ 17. Линейные уравнения. Разные задачи

Если y_1 есть частное решение однородного уравнения $y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+\ldots+p_ny=0$, то подстановка $y=y_1u$ приводит к уравнению, порядок которого легко понижается, если положить $u'=v$.

Решить уравнения:

1583. $xy''+2y'+xy=0$; $xy_1=\sin x$.

1584. $(2x-x^2)y''+(x^2-2)y'+2(1-x)y=0$; $y_1=x^2$.

1585. $x^2(\ln x-1)y''-xy'+y=0$; $y_1=x$.

1586. $xy''-(1+x)y'+y=0$; $y_1=1+x$.

1587. $y''+(\operatorname{tg} x-2\operatorname{ctg} x)y'+2\operatorname{ctg}^2 x\cdot y=0$; $y_1=\sin x$.

1588. $y''\sin^3 x=4y\sin 3x$; $y_1=\sin^4 x$.

1589. $x(1-x)^2y''=2y$; $(1-x)y_1=x$.

1590. $(1+x^2)y''+xy'-n^2y=0$; $y_1=\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^n$.

1591. $(2x+1)y''+(4x-2)y'-8y=0$; $y_1=e^{mx}$ при соответствующем выборе m.

1592. $x(x-1)y''-(2x-1)y'+2y=2x^3-3x^2$, зная частный интеграл соответствующего однородного уравнения

$$z_1=x^2.$$

Если линейное уравнение с рациональными коэффициентами имеет частным решением полином, то он легко может быть найден. Так, если уравнение $(1-x^2)y''-xy'+9y=0$ имеет решение в виде полинома $y=Ax^n+Bx^{n-1}+\ldots+M$, то после подстановки полинома в левую часть этого уравнения коэффициенты при степенях x после приведения подобных членов должны равняться нулю. Для коэффициента при высшей степени x получаем равенство: $-An(n-1)-An+9A=0$ или $A(n^2-9)=0$. Так как $A\neq 0$ и $n\neq -3$, то $n=3$. Поэтому, если y в данном уравнении может быть полиномом, то только полиномом третьей степени. Полагая $y=Ax^3+Bx^2+Cx+D$ и подставляя в данное уравнение, приравниваем нулю коэффициенты при степенях x. Отсюда получаются уравнения: $B=0$, $4C=-3A$, $D=0$. Поэтому $y=A_1(4x^3-3x)$ есть решение данного уравнения.

Проинтегрировать следующие уравнения, имеющие частное решение, равное полиному:

1593. $xy''-(x+5)y'+3y=0$.

1594. $(x^2-1)y''=6y$.

1595. $y''-2xy'+4y=0$.

1596. $xy''-(x+2)y'+y=0$.

1597. Показать, что уравнение Лежандра $[(x^2-1)y']'-n(n+1)y=0$, где n — целое и положительное число, имеет частные решения в виде: $y_1=P(x)$ и $y_2=P(x)\ln\frac{x+1}{x-1}+Q(x)$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — полиномы.

1598. При каком значении μ уравнение

$$(1-x^2)y''-2xy'+\mu y=0$$

имеет частное решение в виде полинома третьей степени? Найти его.

1599. Показать, что уравнение $xy''-(x+p+q)y'+py=0$, где p и q — положительные и целые числа, имеет одно частное решение в виде полинома, а другое — в виде $e^xP(x)$, где $P(x)$ — тоже полином.

В следующих пяти уравнениях общий интеграл — рациональная функция. Это позволяет найти его. При этом важно иметь в виду, что знаменатель такого интеграла может состоять лишь из линейных множителей, являющихся делителями полинома $a(x)$, если данное уравнение имеет вид $a(x)y''+b(x)y'+c(x)y=0$, где $a(x)$, $b(x)$ и $c(x)$ — полиномы.

Интегрировать уравнения:

1600. $(x^2-x)y''+(2x-3)y'-2y=0$.

1601. $(x^2-x)y''+(x+1)y'-y=0$.

1602. $(x^2-x)y''+(4x-2)y'+2y=0$.

1603. $x^2(2x+1)(x+1)y''-2x(x^2+3x+1)y'+(6x+2)y=0$

1604. $(1+x^2)y''+6xy'+6y=0$.

В следующих задачах решение достигается тем, что вводят новое независимое переменное, полагая $x=\varphi(t)$ и выбирая функцию $\varphi(t)$ так, чтобы в преобразованном уравнении обратился в нуль коэффициент при $\frac{dy}{dt}$.

1605. $2xy''+y'-2y=0$

1606. $x^4y''+2x^3y'+n^2y=0$.

1607. $(1+x^2)^2y''+2x(1+x^2)y'+y=0$.

1608. $(1-x^2)y''-xy'+n^2y=0$.

1609. $y''\operatorname{ch}^2 2x+y'\operatorname{sh}4x+\frac{m^2}{4}y=0$.

1610. $y''\sin x\cos x-y'+m^2y\operatorname{tg}x\sin^2 x=0$.

Следующие уравнения надо решать специальными приемами, связанными с конструкцией этих уравнений.

1611. $x^4y''+2x^3y'-4y=\frac{1}{x}$, положив $x=\frac{1}{t}$.

1612. $xy''+2y'-xy=e^x$, положив $y=\frac{u}{x}$.

1613. $y''+\frac{2}{x}y'-a^2y=2$, положив $y=\frac{u}{x}$.

1614. $x^4y''+c^2y=0$, положив $y=xu$, $x=\frac{1}{t}$.

1615. $x^4y''-c^2y=0$, положив $y=\frac{u}{t}$, $x=\frac{1}{t}$.

1616. $\sin^2 x\, y''+\sin x\cos x\, y'-y=0$, подобрав интегрирующий множитель.

1617. Решить уравнение $y'''=(x^2y''-2xy'+2y)P+Q$ подстановкой $x^2y''-2xy'+2y=u$. Здесь P и Q — данные функции от x.

1618. Проинтегрировать уравнение $xy''-4y'-xy=0$, применив к нему четыре раза дифференцирование и используя полученные равенства.

1619. Найти общий интеграл уравнения Стокса $x^2(1-x)^2y''+\beta y=0$, где β — постоянная, отыскав частное решение вида

$$y=x^m(1-x)^n.$$

1620. Найти решение уравнения Стокса

$$x^2(1-x^2)y''+\beta y=\beta x^2(1-x)^2$$

такое, что $y=y'=0$ при $x=0$.

§ 18. Системы дифференциальных уравнений

Систему уравнений, содержащих высшие производные, введением новых переменных можно заменить системой, содержащей производные только первого порядка. Исключением неизвестных ее можно привести к виду:

$$\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\ldots=\frac{dx_n}{X_n} \tag{*}$$

Как правило и обратно: систему вида (*) с помощью дифференцирования и исключения переменных можно свести к одному или нескольким уравнениям с одной неизвестной функцией каждое. Системе (*) можно придать также такой вид:

$$\frac{dx_1}{dt}=X_1,\quad \frac{dx_2}{dt}=X_2,\ldots,\quad \frac{dx_n}{dt}=X_n. \tag{**}$$

Один из способов решения систем приведенных видов состоит в получении интегрируемых комбинаций из данных уравнений. Если удается получить уравнение, содержащее только две переменных x_l и x_m, то оно интегрируется, как таковое. После этого получается один из интегралов уравнения: $\varphi(x_l, x_m)=C$. Иногда удается умножением на подходящие множители и сложением получить равенство вида: $A_1\,dx_1 + A_2\,dx_2 + \ldots + A_n\,dx_n = 0$, где левая часть представляет полный дифференциал некоторой функции $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Тогда имеем равенство $u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C$, дающее один из интегралов системы. Когда получено $n-1$ интегралов системы с n переменными, то решение закончено, если эти интегралы независимы. Каждый найденный интеграл исключением переменных позволяет свести систему к системе с меньшим числом переменных.

Пример 1. $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{z\,dz}{xy}$.

Здесь первое уравнение $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$ представляет интегрируемую комбинацию и дает интеграл $y = Cx$. Подставляя это в равенство $\frac{dx}{x} = \frac{z\,dz}{xy}$, находим: $Cx\,dx = z\,dz$, $Cx^2 = z^2 + C_1$. Равенства $y = Cx$, $xy = z^2 + C_1$ дают полное решение системы.

Пример 2. $\frac{dx}{\Delta_1} = \frac{dy}{-\Delta_2} = \frac{dz}{\Delta_3}$, где Δ_1, Δ_2, Δ_3 — миноры определителя

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{vmatrix},$$

соответствующие элементам третьей строки.

Вводя переменное t, переписываем систему в таком виде:

$$\frac{dx}{dt} = \Delta_1, \quad \frac{dy}{dt} = -\Delta_2, \quad \frac{dz}{dt} = \Delta_3.$$

Отсюда получаем:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}dx + \frac{\partial f_1}{\partial y}dy + \frac{\partial f_1}{\partial z}dz = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\Delta_1 - \frac{\partial f_1}{\partial y}\Delta_2 + \frac{\partial f_1}{\partial z}\Delta_3\right)dt = 0,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}dx + \frac{\partial f_2}{\partial y}dy + \frac{\partial f_2}{\partial z}dz = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\Delta_1 - \frac{\partial f_2}{\partial y}\Delta_2 + \frac{\partial f_2}{\partial z}\Delta_3\right)dt = 0.$$

Это сразу дает два интеграла системы:

$$f_1(x, y, z) = C_1, \quad f_2(x, y, z) = C_2.$$

Пример 3. Решить систему:

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = a\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}\,\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \quad x^2 + y^2 = z^2.$$

Учитывая последнее равенство, пишем $x = z\cos\varphi$, $y = z\sin\varphi$. После этого первое уравнение переписывается в таком виде:

$$2z\,dz = a\sqrt{z^2\,d\varphi^2 + 2dz^2}\cdot z\sqrt{2}$$

и интегрируется без труда.

Системы, данные в следующих задачах, решаются просто, так как из уравнений этих систем легко получаются интегрируемые комбинации.

1621. $\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}$. **1622.** $\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{x+y}$.

1623. $\frac{dx}{y}=-\frac{dy}{x}=\frac{dp}{q}=-\frac{dq}{p}$.

1624. $\frac{dx}{x-y}=\frac{dy}{x+y}=\frac{dz}{z}$.

1625. $(z-y)^2\,dy=z\,dx,\quad (z-y)^2\,dz=y\,dx$.

1626. $dx=(x^3+3xy^2)\,dt,\quad dy=2y^3\,dt,\quad dz=2y^2z\,dt$.

1627. $z\,dy=(z-1)\,dx,\quad dx=(y-x)\,dz$.

1628. $\frac{dx}{z-y}=\frac{dy}{x-z}=\frac{dz}{y-x}$.

1629. $\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

1630. $\frac{dx}{dt}=\frac{x-y}{z-t},\quad \frac{dy}{dt}=\frac{x-y}{z-t},\quad \frac{dz}{dt}=x-y+1$.

1631. $\frac{dx}{x^2-y^2-z^2}=\frac{dy}{2xy}=\frac{dz}{2xz}$.

1632. $\frac{dx}{y(x+y)}=\frac{-dy}{x(x+y)}=\frac{dz}{(x-y)(2x+2y+z)}$.

1633. $\frac{dx}{x^2-yz}=\frac{dy}{y^2-yz}=\frac{dz}{z(x+y)}$; $z=-1$, $y=1$ при $x=0$.

В следующих двух задачах использовать замечание: если $a^2+b^2=c^2$, то можно положить $a=c\cos\varphi$, $b=c\sin\varphi$.

1634. $x\,dy-y\,dx=s\,ds,\quad dx^2+dy^2=ds^2$.

1635. $dx^2+dy^2=a^2\,dt^2,\quad (d^2x)^2+(d^2y)^2=b^2\,dt^4$.

Систему можно сводить к уравнениям высшего порядка, применяя исключение переменных и дифференцирование. Так в системе

$$x'=x+y+z+t,\quad y'=3x-y+z+t,\quad z'=2x+2y-z, \tag{*}$$

где t — независимое переменное, из первого уравнения имеем: $z=x'-x-y-t$. Подставляя это в два других уравнения, получаем:

$$y'=x'+2x-2y,$$
$$y'=x''-3x-3y-t-1.$$

Вычитая, приходим к равенству: $x''-x'-5x-y-t-1=0$. Отсюда $y=x''-x'-5x-t-1$. Подставляя это в равенство $y'=x'+2x-2y$, имеем:

$$x'''+x''-8x'-12x=2t+3.$$

Интегрируя это линейное уравнение, находим:

$$x=C_1e^{3t}+e^{-2t}(C_2+C_3t)-\frac{t}{6}-\frac{5}{36}.$$

После этого y и z находятся без всякого интегрирования из равенств

$$y = x'' - x' - 5x - t - 1, \quad z = x' - x - y - t.$$

Ту же систему можно решить и иным, более симметричным, путем. Умножая и складывая уравнения (*), получаем:

$$ax' + by' + cz' = \\ = (a + 3b + 2c)\,x + (a - b + 2c)\,y + (a + b - c)\,z + (a + b)\,t. \qquad (**)$$

Коэффициенты a, b и c определим из равенств:

$$a + 3b + 2c = \lambda a, \quad a - b + 2c = \lambda b, \quad a + b - c = \lambda c,$$

что возможно, если равен нулю определитель

$$D = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 2 \\ 1 & -1-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix}.$$

После этого уравнение (**) переписывается так:

$$(ax + by + cz)' = \lambda\,(ax + by + cz) + (a + b)\,t.$$

Отсюда следует равенство:

$$ax + by + cz = Ce^{\lambda t} - \frac{a+b}{\lambda}t - \frac{a+b}{\lambda^2}. \qquad (***)$$

Уравнение $D = 0$ дает значения λ: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -2$. При $\lambda = 3$ имеем $\frac{a}{14} = \frac{b}{6} = \frac{c}{5}$. Можем положить $a = 14$, $b = 6$, $c = 5$. При $\lambda = -2$ можем положить $a = 1$, $b = -1$, $c = 0$. Из уравнения (***) получаем два интеграла системы:

$$14x + 6y + 5z = C_1e^{3t} - \frac{20}{3}t - \frac{20}{9},$$

$$x - y = C_2e^{-2t}.$$

Определив отсюда x и y и подставив в уравнения системы, получим для z линейное уравнение первого порядка.

Решить системы уравнений, выделив, где это указано, решение, удовлетворяющее начальным данным.

1636. $\frac{dy}{dx} + 3y + z = 0$, $\frac{dz}{dx} - y + z = 0$; $y = z = 1$ при $x = 0$.

1637. $\frac{dx}{dt} + 7x - y = 0$, $\frac{dy}{dt} + 2x + 5y = 0$; $x = y = 1$ при $t = 0$.

1638. $\frac{dx}{dt} = z + y - x$, $\frac{dy}{dt} = z + x - y$, $\frac{dz}{dt} = x + y + z$; $x = 1$, $y = z = 0$ при $t = 0$.

1639. $\frac{dx}{dt} = y + z$, $\frac{dy}{dt} = z + x$, $\frac{dz}{dt} = x + y$; $x = -1$, $y = 1$, $z = 0$ при $t = 0$.

1640. $\frac{dy}{dx}+\frac{dz}{dx}=2z, \quad 3\frac{dy}{dx}+\frac{dz}{dx}=y+9z.$

1641. $\frac{dx}{dt}=z-y, \quad \frac{dy}{dt}=z, \quad \frac{dz}{dt}=z-x.$

1642. $\frac{dx}{y}=\frac{dy}{z}=\frac{dz}{x}.$

1643. $\frac{dx}{dt}=y-z, \quad \frac{dy}{dt}=z-2x, \quad \frac{dz}{dt}=2x-y.$

1644. $\frac{d^2x}{dt^2}+2m^2y=0, \quad \frac{d^2y}{dt^2}-2m^2x=0.$

1645. $\frac{d^2x}{dt^2}=3(y-x-z), \quad \frac{d^2y}{dt^2}=x-y, \quad \frac{d^2z}{dt^2}=-z.$

1646. $\frac{dx}{dt}=-x+y+z, \quad \frac{dy}{dt}=x-y+z, \quad \frac{dz}{dt}=x+y-z.$

1647. $\frac{d^2x}{dt^2}=-x+y+z, \quad \frac{d^2y}{dt^2}=x-y+z, \quad \frac{d^2z}{dt^2}=x+y-z.$

1648. $\frac{d^2y}{dx^2}=3y+4z-3, \quad \frac{d^2z}{dx^2}+y+z-5=0.$

1649. $\frac{dx}{dt}=y, \quad \frac{dy}{dt}=x+e^t+e^{-t}.$

1650. $x'+5x-2y=e^t, \quad y'-x+6y=e^{2t}.$

1651. $y'=3z-y, \quad z'=z+y+e^{ax}.$

1652. $x'=2x+4y+\cos t; \quad y'+x+2y=\sin t.$

1653. $y''+y'+z''-z=e^x, \quad y'+2y-z'+z=e^{-x}.$

1654. $y'-y+z=3x^2, \quad z'+4y+2z=2+8x.$

1655. $x^2y''+xz'+y+z=x+1, \quad x^2z''+xy'-y-z=-x-1.$

1656. $x'+n^2y=\cos nt, \quad y'+n^2x=\sin nt.$

1657. $x^2y'+z=x^2, \quad z'+y=x.$

1658. $y'+z=1, \quad x^2z'+2y=x^2\ln x.$

1659. $tx''+2x'+tx=0, \quad ty'+2y-tx'=0.$

1660. $tx'=t-2x, \quad ty'=t(x+y)+2x-t.$

1661. Решить систему Лиувилля:

$$9x''+8[x-3\cos t(x\cos t+y\sin t)]=0,$$

$$9y''+8[y-3\sin t(x\cos t+y\sin t)]=0,$$

введя переменные $u=x\cos t+y\sin t, \ v=x\sin t-y\cos t.$

1662. Доказать, что интегрирование системы Гессе:

$$x'=X+xT, \quad y'=Y+yT, \quad z'=Z+zT,$$

где X, Y, Z и T — линейные формы от переменных x, y и z, подстановками $x=\frac{\xi}{\tau}$, $y=\frac{\eta}{\tau}$, $z=\frac{\zeta}{\tau}$ сводится к интегрированию системы линейных однородных уравнений.

Интегрировать с помощью приема Гессе системы:

1663. $\frac{dx}{dt} = y + xz, \ \frac{dy}{dt} = x + yz, \ \frac{dz}{dt} = x + z^2.$

1664. $\frac{dx}{dt} = x + x(x+y), \ \frac{dy}{dt} = z + y(x+y), \ \frac{dz}{dt} = y + z(x+y).$

При решении линейных уравнений с постоянными коэффициентами полезно применять символический метод. При этом вводят символический множитель D, заменяющий действие дифференцирования, и пишут, например, $(D^2+3D+2)u$ вместо $u''+3u'+2u$. Для таких символических множителей применимы правила обыкновенной алгебры. При этом, например, тождество: $(D+1)(D+2) = D^2+3D+2$ эквивалентно равенству $(u'+2u)'+(u'+2u) = u''+3u'+2u$.

Если даны два уравнения:

$$ax''+bx'+cx+a_1y''+b_1y'+c_1y = 0,$$
$$\alpha x''+\beta x'+\gamma x+\alpha_1 y''+\beta_1 y'+\gamma_1 y = f(t),$$

где t — независимое переменное, то их можно переписать в таком виде:

$$(aD^2+bD+c)\,x+(a_1D^2+b_1D+c_1)\,y = 0,$$
$$(\alpha D^2+\beta D+\gamma)\,x+(\alpha_1 D^2+\beta_1 D+\gamma_1)\,y = f(t).$$

Чтобы удовлетворить первому уравнению, достаточно положить:

$$x = (a_1D^2+b_1D+c_1)\,u, \quad y = -(aD^2+bD+c)\,u,$$

где u — неизвестная функция. После этого второе уравнение переходит в такое:

$$[(\alpha D^2+\beta D+\gamma)(a_1D^2+b_1D+c_1)-(\alpha_1D^2+\beta_1D+\gamma_1)(aD^2+bD+c)]\,u = f(t)$$

Раскрыв скобки и заменив степени D соответствующими производными, получим линейное уравнение с постоянными коэффициентами для u. Решив его, найдем величины x и y по формулам:

$$x = a_1u''+b_1u'+c_1u, \quad y = -(au''+bu'+cu).$$

Такой же метод применим и для большого числа уравнений. Так, в уравнениях:

$$\varphi(D)\,x+\psi(D)\,y+\omega(D)\,z = 0,$$
$$\varphi_1(D)\,x+\psi_1(D)\,y+\omega_1(D)\,z = 0,$$
$$\varphi_2(D)\,x+\psi_2(D)\,y+\omega_2(D)\,z = f(t),$$

где $\varphi(D)$, $\psi(D), \ldots, \omega_2(D)$ — полиномы относительно D, можем удовлетворить первым двум уравнениям, положив:

$$x = [\psi(D)\,\omega_1(D)-\psi_1(D)\,\omega(D)]\,u, \quad y = (\omega\varphi_1-\omega_1\varphi)\,u, \quad z = (\varphi\psi_1-\varphi_1\psi)\,u. \qquad (*)$$

Подставляя это в третье уравнение, получим:

$$[\varphi\psi_1\omega_2-\varphi\psi_2\omega_1+\varphi_1\psi_2\omega-\varphi_1\psi\omega_2+\varphi_2\psi\omega_1-\varphi_2\psi_1\omega]\,u = f(t).$$

Раскрыв скобки и заменив степени D соответствующими производными, получим линейное уравнение для u с постоянными коэффициентами. Решив его, из равенств (*) найдем x, y и z.

Более подробное изложение указанного приема дано в книге академика В. И. Смирнова „Курс высшей математики“, т. II.

Решить символическим методом системы уравнений:

1665. $x''+2x'+x+y''+y'+2y=0,$
$x''+x'+2x+y''+3y=4t+5.$

1666. $x''-x'+6x+y''-y'+2y=0,$
$2x''+x'+3x+y''+y=t-1.$

1667. $x'''-x''-x'+x-y''+3y'-2y+z'-z=0,$
$3x''-6x'+3x-y''+4y'-3y+2z'-2z=0,$
$x''-2x'+x+y'-y+z'-z=0.$

1668. $5x''+5x+3y''+3y+8z''+8z=0,$
$x''+4x+3y''+12y+3z''+12z=0,$
$x''-2x-2y''-11y-9z=0.$

Уравнения движения материальной точки массы m под действием силы, проекции которой на оси равны X, Y, Z имеют вид:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=X, \quad m\frac{d^2y}{dt^2}=Y, \quad m\frac{d^2z}{dt^2}=Z,$$

где x, y, z — координаты движущейся точки.

1669. Найти траекторию движущейся точки, если сила, действующая на нее, направлена по перпендикуляру к оси Oz и пропорциональна расстоянию точки до этой оси.

1670. Если проекции силы на ось равны производным от некоторой функции u по соответствующим координатам: $X=\frac{\partial u}{\partial x}$, $Y=\frac{\partial u}{\partial y}$, $Z=\frac{\partial u}{\partial z}$, то справедливо равенство $\frac{mv^2}{2}=u+C$, где u — скорость точки, равная $\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}$. Доказать.

1671. Если линия действия силы проходит через ось Oz, то проекция радиуса-вектора на xOy в равные времена описывает равные площади. Доказать.

1672. Определить движение тела, падающего с высоты h в среде, сопротивление которой пропорционально v^n, где v — скорость тела. Начальная скорость v_0 наклонена к горизонту под углом α_0.

1673. Если V — потенциал электрического поля, а $\mathbf{H}$ — напряженность магнитного поля, то уравнение движения наэлектризованной частицы в векторной форме таково:

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=e\,\mathrm{grad}\,V+e\,\mathbf{H}\times\frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

Найти движение частицы, считая $\mathrm{grad}\,V$ и $\mathbf{H}$ постоянными.

1674. Та же задача, что и предыдущая, но $V = \mathrm{const}$, $\mathbf{H} = \operatorname{grad} \frac{k}{r}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

§ 19. Линейные уравнения в частных производных первого порядка

Задачи этого параграфа основаны на теореме:
Общий интеграл уравнения

$$X_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = X_{n+1}$$

получается из уравнения:

$$F(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0,$$

где $X_1, X_2, \ldots, X_{n+1}$ — данные функции переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и z, F — произвольная дифференцируемая функция, а равенства

$$u_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = C_1, \ldots, u_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = C_n$$

дают полную систему независимых интегралов системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{dz}{X_{n+1}}.$$

Найти общий интеграл уравнений:

1675. $\cos y \frac{\partial z}{\partial x} + \cos x \frac{\partial z}{\partial y} = \cos x \cos y.$

1676. $xy \frac{\partial z}{\partial x} - y^2 \frac{\partial z}{\partial y} + x(1 + x^2) = 0.$

1677. $xz \frac{\partial z}{\partial x} + yz \frac{\partial z}{\partial y} = x.$ **1678.** $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0.$

1679. $x \frac{\partial z}{\partial x} + \left(y - \sqrt{R^2 - z^2}\right) \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$

1680. $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = xy + z.$ **1681.** $y^3 \frac{\partial z}{\partial y} - xy^2 \frac{\partial z}{\partial x} = axz.$

1682. $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy \sqrt{a^2 - z^2}.$

1683. $y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = xz.$ **1684.** $(x^2 + y^2) \frac{\partial z}{\partial x} = y^2 + z^2.$

1685. $xz^4 \frac{\partial z}{\partial x} + yz^4 \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 y^2.$

1686. $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z + a \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$

1687. $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - x^2 - y^2.$

1688. $(y^2 + z^2 - x^2) \frac{\partial z}{\partial x} - 2xy \frac{\partial z}{\partial y} + 2xz = 0.$

1689. $(xy^3 - 2x^4)\frac{\partial z}{\partial x} + (2y^4 - x^3y)\frac{\partial z}{\partial y} = 9z(y^3 - x^3)$.

1690. $(x^3 + 3xy^2)\frac{\partial z}{\partial x} + 2y^3\frac{\partial z}{\partial y} - 2y^2z = 0$.

1691. $(x^2 - y^2)\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} + xyz = 0$.

1692. $(y + x)\frac{\partial z}{\partial x} + (y - x)\frac{\partial z}{\partial y} = z$.

1693. $(x + y)\left(1 + \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\right) + z\frac{\partial z}{\partial x} = 0$.

1694. $(z + y - x)\frac{\partial z}{\partial x} + (z + x - y)\frac{\partial z}{\partial y} = x + y - z$.

1695. $(z + x)x\frac{\partial z}{\partial x} + (z + y)y\frac{\partial z}{\partial y} = z^2 - xy$.

1696. $(z + e^x)\frac{\partial z}{\partial x} + (z + e^y)\frac{\partial z}{\partial y} = z^2 - e^{x+y}$.

1697. $x\frac{\partial u}{\partial x} + (z + u)\frac{\partial u}{\partial y} + (y + u)\frac{\partial u}{\partial z} = y + z$.

1698. $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = xyz$.

1699. $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = u + \frac{xy}{z}$.

1700. $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = x^2 + 2u$.

1701. $xy\frac{\partial u}{\partial x} - \sqrt{1 - y^2}\left(y\frac{\partial u}{\partial y} - z\frac{\partial u}{\partial z}\right) = axy\frac{\partial u}{\partial z}$.

1702. $(s - x)\frac{\partial u}{\partial x} + (s - y)\frac{\partial u}{\partial y} + (s - z)\frac{\partial u}{\partial z} = s - u$; $s = x + y + z + u$.

1703. $xz\frac{\partial z}{\partial x} + yz\frac{\partial z}{\partial y} = xy$.

1704. $\frac{\partial z}{\partial x} - a\frac{\partial z}{\partial y} = e^{mx}\cos py$.

1705. $\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + c\frac{\partial u}{\partial z} = xyz$.

1706. $\frac{1}{\cos x}\frac{\partial z}{\partial x} + a\frac{\partial z}{\partial y} = z\operatorname{ctg} y$.

1707. $x\frac{\partial z}{\partial x} + \sqrt{1 + y^2}\frac{\partial z}{\partial y} = xy$.

1708. $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2xy\sqrt{a^2 - z^2}$.

1709. $(y - bz)\frac{\partial z}{\partial x} - (x - az)\frac{\partial z}{\partial y} = bx - ay$.

1710. Если $u(x, y, z) = 0$ — уравнение поверхности, то

$$\frac{\partial u}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial u}{\partial y}(Y - y) + \frac{\partial u}{\partial z}(Z - z) = 0$$

— уравнение касательной плоскости. Найти уравнение в частных производных для конических поверхностей, образующие которых проходят через начало координат.

1711. Найти уравнение в частных производных для цилиндрических поверхностей, образующие которых параллельны вектору $\mathbf{P}(l, m, n)$.

1712. Проинтегрировать уравнение конических поверхностей $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=0$. С помощью полученного результата найти уравнение конической поверхности, направляющая которой имеет уравнение $x^2+y^2=ax$, $z=1$.

1713. Проинтегрировать уравнение цилиндрических поверхностей и в полученном общем интеграле определить вид произвольной функции так, чтобы поверхность проходила через окружность $x^2+y^2=a^2$, $z=1$.

1714. Однородные функции измерения n по определению обладают свойством (в случае трех переменных): $f(tx, ty, tz)=t^n f(x, y, z)$. По теореме Эйлера для них имеет место равенство: $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=nf$. Доказать обратную теорему: из этого уравнения в частных производных вытекает функциональное свойство однородных функций.

1715. Найти поверхность, проходящую через кривую $xy=a^2$, $z=h$ и удовлетворяющую уравнению:

$$xz\frac{\partial z}{\partial x}+yz\frac{\partial z}{\partial y}+xy=0.$$

1716. Найти поверхность, удовлетворяющую уравнению

$$xy\frac{\partial z}{\partial x}-y^2\frac{\partial z}{\partial y}=x$$

и проходящую через кривую $x=a$, $2ayz=a^2+2$.

1717. Найти поверхность, удовлетворяющую уравнению $(x^2+y^2)\frac{\partial z}{\partial x}+2xy\frac{\partial z}{\partial y}=xz$ и проходящую через кривую $x=a$, $y^2+z^2=a^2$.

1718. Найти поверхность, удовлетворяющую уравнению $z\frac{\partial z}{\partial x}-z\frac{\partial z}{\partial y}=y-x$ и проходящую через кривую $x=1$, $z=y^2$.

1719. Найти поверхность, удовлетворяющую уравнению $2xz\frac{\partial z}{\partial x}+2yz\frac{\partial z}{\partial y}=z^2-x^2-y^2$ и проходящую через окружность $x+y+z=0$, $x^2+y^2+z^2=a^2$.

1720. Найти поверхность, удовлетворяющую уравнению

$$x(x^2+y^2)\frac{\partial z}{\partial x}+2y^2\left(x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}-z\right)=0$$

и проходящую через окружность $z=h$, $x^2+y^2=a^2$.

1721. Найти общее уравнение поверхностей, пересекающих под прямым углом конусы $xy=az^2$.

1722. Найти уравнение поверхностей, ортогональных к поверхностям $xyz=a$.

1723. Найти поверхность, проходящую через прямую $y=x$, $z=h$ и ортогональную к поверхностям шаров $x^2+y^2+z^2=ax$.

1724. Найти поверхность, проходящую через окружность $z=h$, $x^2+y^2=a^2$ и ортогональную к гиперболическим параболоидам $xy=az$.

1725. Найти поверхность, проходящую через кривую $y=x$, $z=x^3$ и удовлетворяющую уравнению $x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=z$.

1726. Найти асимптотические линии предыдущей поверхности, зная, что асимптотические линии поверхности $f(x, y, z)=0$ определяются уравнением: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}dx\,dy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2=0$.

1727. Найти решение уравнения $z(x+z)\frac{\partial z}{\partial x}-y(y+z)\frac{\partial z}{\partial y}=0$, обращающееся в $z=\sqrt{y}$ при $x=1$.

1728. Проинтегрировать уравнение $x^n\frac{\partial z}{\partial x}+y^n\frac{\partial z}{\partial y}=z^n$. Найти поверхность, удовлетворяющую уравнению и проходящую через прямую $z=1$, $x=y\sqrt{2}$. Рассмотреть случаи $n=\pm 1$.

1729. Найти линии кривизны предыдущей поверхности при $n=-1$. Линии кривизны поверхности $z=f(x, y)$ определяются уравнением

$$\frac{(1+p^2)\,dx+pq\,dy}{r\,dx+s\,dy}=\frac{pq\,dx+(1+q^2)\,dy}{s\,dx+t\,dy},$$

где p, q, r, s, t — соответственно частные производные z'_x, z'_y, z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}.

1730. Найти поверхности, удовлетворяющие уравнению

$$2y(2a-x)\frac{\partial z}{\partial x}+(x^2+z^2-y^2-4ax)\frac{\partial z}{\partial y}+2yz=0,$$

и доказать, что они получаются движением кругов.

1731. Найти поверхность, удовлетворяющую уравнению $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2-a^2}}$ и проходящую через эллипс $x=2z$,

$x^2+y^2=a^2$. Доказать, что это — линейчатая поверхность, и найти ортогональные траектории ее образующих.

1732. Найти решение уравнения $2xz\frac{\partial z}{\partial x}+2yz\frac{\partial z}{\partial y}=z^2-x^2-y^2$, заключающее гиперболу $x=a$, $z^2-y^2=a^2$.

1733. Проинтегрировать уравнение:

$$2\operatorname{ch}x\frac{\partial z}{\partial x}+2y\operatorname{sh}x\frac{\partial z}{\partial y}-z\operatorname{sh}x=0.$$

1734. Найти поверхности, удовлетворяющие предыдущему уравнению и проходящие через линии: 1) прямую $x=y=z$; 2) параболу $x=0$, $z^2=2m(y-a)$; 3) цепную линию $z=0$, $y=\alpha\operatorname{ch}x$.

1735. Найдя решение уравнения $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=2z$, проходящее через кривую $z=y=2x^3$, найти ортогональные траектории проекций на xOy его асимптотических линий (см. задачу № 1726).

1736. Найти поверхность, удовлетворяющую уравнению

$$(y^2-x^2+2xz)\frac{\partial z}{\partial x}+2y(z-x)\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

и заключающую эллипс $x=0$, $y^2+4z^2=4a^2$.

1737. Для предыдущей поверхности найти линии стока, т. е. ортогональные траектории линий уровня или сечений поверхности плоскостями $z=C$.

1738. Найти поверхность, удовлетворяющую уравнению $xy^2\frac{\partial z}{\partial x}+$ $+x^2y\frac{\partial z}{\partial y}=z(x^2+y^2)$, зная, что одно из семейств ее асимптотических линий состоит из характеристических линий.

1739. Найти ортогональные поверхности для семейства поверхностей предыдущей задачи.

1740. Найти поверхность, проходящую через окружность $z=0$, $x^2+y^2=y$ и удовлетворяющую уравнению

$$2yz\frac{\partial z}{\partial x}-xz\frac{\partial z}{\partial y}+xy=0.$$

1741. Среди функций, удовлетворяющих уравнению $x\frac{\partial z}{\partial x}+$ $+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$, найти такую, которая удовлетворяет и уравнению $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\frac{a^2}{x^2+y^2}$.

1742. Найти поверхности, у которых касательная плоскость в любой точке M пересекает ось Oz в точке, равноудаленной от начала координат и от точки M.

1743. Найти поверхности, у которых касательная плоскость в точке с координатой z пересекает Oz в точке с координатой nz.

1744. Найти решение системы

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}=0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=0,$$

в котором $u=z^2$ при $x=y=0$.

ОТДЕЛ ОДИННАДЦАТЫЙ
ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. Определенный интеграл, как предел суммы

Конечный интервал (a, b) разбит на n частичных $n+1$ числами:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots x_{n-1} < x_n = b.$$

Длины этих интервалов обозначим $\Delta x_\nu = x_\nu - x_{\nu-1}$. Если дана функция $f(x)$ определенная для каждого x в интервале (a, b), ограниченная в этом интервале, то можно составить сумму произведений любых значений этой функции в частичных интервалах на длины этих интервалов. Эту сумму $\sum\limits_{\nu=1}^{n} f(\xi_\nu)\,\Delta x_\nu$ будем называть суммой Римана. Здесь ξ_ν — какое-нибудь число в сегменте $[x_{\nu-1}, x_\nu]$, т. е. $x_{\nu-1} \leqslant \xi_\nu \leqslant x_\nu$. Если число частичных интервалов $n \to \infty$ так, что $\max\ \Delta x_\nu \to 0$, то для всех непрерывных функций $f(x)$ и обширного класса разрывных функций сумма Римана стремится к пределу, называемому определенным интегралом:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_\nu \to 0} \sum f(\xi_\nu)\,\Delta x_\nu.$$

Разность $O(\Delta x_\nu)$ между точной высшей границей M_ν и точной низшей границей m_ν функции в интервале Δx_ν называется колебанием функции в интервале Δx_ν. Функции, для которых определенный интеграл в указанном смысле существует, называются интегрируемыми в смысле Римана, или просто интегрируемыми в данном интервале.

Необходимое и достаточное условие того, что $f(x)$ интегрируема в данном интервале, состоит в равенстве:

$$\lim_{\max \Delta x_\nu \to 0} \sum O_\nu\,\Delta x_\nu = 0, \quad \text{где} \quad O_\nu = O(\Delta x_\nu).$$

Если вместо чисел $f(\xi_\nu)$ в сумме Римана взять числа M_ν или m_ν, то получатся верхние суммы $\sum M_\nu\,\Delta x_\nu$ или нижние суммы $\sum m_\nu\,\Delta x_\nu$. Если при этом составлять новые разбиения интервала (a, b) на частичные путем разделения прежних частичных интервалов, то верхние суммы приближаются к своему пределу, не возрастая, а нижние — не убывая.

Непрерывная функция $F(x)$, у которой $F'(x) = f(x)$ во всех точках непрерывности $f(x)$ может быть названа неопределенным интегралом от $f(x)$. По теореме Барроу — Ньютона:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Найти с помощью определенных интегралов пределы следующих сумм:

1745. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\frac{3}{n}+\ldots+\frac{2n-1}{n}\right]\frac{1}{n}$.

1746. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1^3}{n^4}+\frac{2^3}{n^4}+\frac{3^3}{n^4}+\ldots+\frac{(4n-1)^3}{n^4}\right]$.

1747. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\left[\sin\frac{\pi a}{n}+\sin\frac{2\pi a}{n}+\ldots+\sin\frac{(n-1)\pi a}{n}\right]$.

1748. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right]$.

1749. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+(n-1)^2}\right]$.

1750. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{2}{\sqrt{4n^2-1^2}}+\frac{2}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\ldots+\frac{2}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right]$.

1751. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ldots 2n}}{n}$.

1752. Найти величину интеграла $\int\limits_0^1 e^x\,dx$, рассматривая его как предел суммы.

1753. Найти при $b>a>0$ величину интеграла $\int\limits_a^b x^n\,dx$, рассматривая его как предел суммы $\sum x_\nu^n\,\Delta x_\nu$, где значения x_ν идут в геометрической прогрессии. (Ферма.)

1754. Исходя из разложения дроби на простейшие:

$$\frac{nx^{n-1}}{x^n-1}=\frac{1}{x-x_0}+\frac{1}{x-x_1}+\ldots+\frac{1}{x-x_{n-1}},\quad x_\nu=e^{\frac{2\pi\nu i}{n}},$$

получить равенство:

$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{x-e^{\varphi i}}=0 \text{ при } |x|<1 \text{ и } \frac{2\pi}{x} \text{ при } |x|>1.$$

1755. Исходя из формулы

$$x^{2n}-1=(x^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2-2x\cos\frac{k\pi}{n}+1\right),$$

получить величину интеграла Пуассона:

$$\int\limits_0^{\pi}\ln(1-2x\cos\varphi+x^2)\,d\varphi=0 \text{ при } |x|<1 \text{ и } \pi\ln(x^2) \text{ при } |x|>1.$$

1756. Из разложения дроби на простейшие:

$$\frac{2nx^{2n-1}}{x^{2n}-1}=\frac{1}{x^2-1}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2x-2\cos\frac{k\pi}{n}}{x^2-2x\cos\frac{k\pi}{n}+1}$$

получить равенство:

$$\int_0^{\pi}\frac{x-\cos\varphi}{x^2-2x\cos\varphi+1}\,d\varphi=0 \text{ при } |x|<1 \text{ и } \frac{\pi}{x} \text{ при } |x|>1.$$

1757. Функция $[u]$ равна целой части переменного u, т. е. такому целому числу m, что $m\leqslant u<m+1$. В таком случае $[2u]-2[u]=0$, если $u-m<\frac{1}{2}$, и равно 1, если $\frac{1}{2}\leqslant u-m<1$. Доказать, что для функции $f(x)=\left[\frac{2}{x}\right]-2\left[\frac{1}{x}\right]$ в интервале (0, 1) справедливо неравенство:

$$\sum_{\nu=1}^{n} O_\nu\,\Delta x_\nu<3\sqrt{\max\Delta x_\nu}$$

и, следовательно, функция $f(x)$ — интегрируема в смысле Римана.

1758. Функция $f(x)$ определена равенствами: $f(x)=0$, если x иррационально, $f(x)=\frac{1}{q}$, если $x=\frac{p}{q}$, где p и q — взаимно простые целые числа. Доказать, что для интервала (0, 1) справедливо неравенство: $\sum\limits_{\nu=1}^{n} O_\nu\,\Delta x_\nu<2\sqrt{\max\Delta x_\nu}$. Таким образом, $f(x)$ интегрируема в интервале (0, 1), хотя она имеет разрыв в каждой точке с рациональной абсциссой.

1759. Функция $f(x)$ определена равенствами $f(x)=0$ при x иррациональном и $f(x)=1$ при x рациональном. Доказать, что она неинтегрируема в любом интервале.

§ 2. Теоремы о среднем значении. Несобственные интегралы

Первая теорема о среднем. Если $f(x)$ непрерывна в интервале (a, b), а $\varphi(x)$ знакопостоянна в том же интервале, то

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx=f(c)\int_a^b\varphi(x)\,dx,$$

где c — некоторое промежуточное значение аргумента между a и b.

В приложениях зачастую бывает еще удобней теорема: если при $a<x<b$, справедливы неравенства:

$$\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x), \text{ то } \int_a^b \varphi(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b \psi(x)\,dx.$$

При этом знак равенства исключается, если в некоторой части интервала разность $f(x)-\varphi(x)$ или соответственно $\psi(x)-f(x)$ остается больше некоторого положительного числа h.

Вторая теорема о среднем. Если $f(x)$ и $\varphi(x)$ — интегрируемые функции, из которых $\varphi(x)$ монотонна, то

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(a)\int_a^\xi f(x)\,dx + \varphi(b)\int_\xi^b f(x)\,dx,$$

где ξ — некоторое промежуточное значение аргумента между a и b.

Если $\varphi(a) > \varphi(b) \geqslant 0$, то можно написать:

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(a)\int_a^\xi f(x)\,dx, \quad a<\xi<b.$$

Доказать следующие формулы:

1760. $0 < \int_0^1 \frac{x^{19}}{\sqrt[3]{1+x^6}}\,dx < \frac{1}{20}$. **1761.** $0 < \int_0^{200} \frac{e^{-5x}\,dx}{20+x} < 0{,}01$.

1762. $-\frac{\pi}{4} < \int_0^\infty \frac{\cos ax}{4+x^2}\,dx < \frac{\pi}{4}$.

1763. $0 < \int_2^\infty e^{-x^2}\,dx < \frac{1}{4e^4}$. **1764.** $0 < \int_{10}^{20} \frac{x^2\,dx}{x^4+x+1} < \frac{1}{20}$.

1765. $\frac{1}{19} < \int_1^\infty \frac{1+x^{20}}{1+x^{40}}\,dx < \frac{1}{19}+\frac{1}{39}$.

1766. $1 < \int_0^1 \frac{1+x^{20}}{1+x^{40}}\,dx < 1+\frac{1}{42}$.

1767. $\frac{20}{19} < \int_0^\infty \frac{1+x^{20}}{1+x^{40}}\,dx < \frac{20}{19}+\frac{1}{20}$.

1768. $0 < \int_1^\infty e^{-x^n}\,dx < \frac{1}{n}$; $n>1$.

1769. $1-\frac{1}{n}<\int\limits_0^1 e^{-x^n}\,dx<1;\quad n>1.$

1770. $1-\frac{1}{n}<\int\limits_0^\infty e^{-x^n}\,dx<1+\frac{1}{n}.$

1771. Пользуясь тождеством

$$\frac{1}{100+x}=\frac{1}{100}-\frac{x}{100\,(100+x)},$$

доказать равенство:

$$\int\limits_0^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{100+x}=0{,}01-0{,}0001\,\theta;\quad 0<\theta<1.$$

1772. Пользуясь тождеством

$$\frac{x^3}{x^4+x+1}=\frac{1}{x}-\frac{x+1}{x\,(x^4+x+1)},$$

доказать равенство:

$$\int\limits_{100}^{200} \frac{x^3\,dx}{x^4+x+1}=\ln 2-\frac{\theta}{3\cdot 10^6};\quad 0<\theta<1.$$

Доказать равенства:

1773. $\int\limits_{100}^{200} \frac{\sin \pi x}{x}\,dx=\frac{\theta}{100\pi};\quad |\theta|<1.$

1774. $\int\limits_a^b \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx=\frac{2\theta}{\sqrt{a}};\quad |\theta|<1;\quad b>a>0.$

1775. $\int\limits_{100}^{200} \sin \pi x^2\,dx=\frac{\theta}{200\pi};\quad 0<\theta<1.$

1776. $\int\limits_{100}^{200} \frac{\sin \pi x}{x}\,dx=\frac{0{,}005}{\pi}+\frac{2\theta}{\pi^3\cdot 10^6};\quad |\theta|<1.$

Интегралы, имеющие один из видов:

$$\int\limits_a^\infty f(x)\,dx,\quad \int\limits_{-\infty}^b f(x)\,dx,\quad \int\limits_{-\infty}^\infty f(x)\,dx,$$

определяются соответственно предельными переходами:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^n f(x)\,dx, \quad \int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{m\to\infty} \int_{-m}^b f(x)\,dx,$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \lim_{m,\,n\to\infty} \int_{-m}^n f(x)\,dx.$$

При этом предполагается, что соответствующий предел существует. В противном случае интегралы, стоящие в левых частях написанных равенств, смысла не имеют и называются несходящимися или расходящимися. Необходимое и достаточное условие сходимости интеграла $\int_a^\infty f(x)\,dx$ состоит в том, что при любом заданном положительном ε неравенство $\left|\int_{n_1}^{n_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$ выполняется, как только числа n_1 и n_2 больше некоторого $n_0 = n_0(\varepsilon)$. Аналогичные критерии имеются и для интегралов двух других видов.

Если функция $f(x)$ в интервале (a, b) обращается в бесконечность, то $\int_a^b f(x)\,dx$, как предел суммы Римана, тоже не имеет смысла. Смысл может быть придан такому интегралу дополнительным предельным переходом. Так, если $f(x)$ обращается в ∞ при $x = c$, то по определению:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\eta\to 0} \int_a^{c-\eta} f(x)\,dx + \lim_{\delta\to 0} \int_{c+\delta}^b f(x)\,dx, \tag{*}$$

предполагая, что эти пределы существуют. В противном случае интеграл в левой части не сходится. Необходимое и достаточное условие сходимости состоит в том, что каждый из интегралов $\int_{c-\eta_1}^{c-\eta_2} f(x)\,dx$ и $\int_{c+\delta_1}^{c+\delta_2} f(x)\,dx$ по абсолютной величине должен быть меньше произвольно задаваемого положительного постоянного ε, если положительные числа η_1, η_2, δ_1, δ_2 остаются меньше соответствующей малой величины $h = h(\varepsilon)$.

В обоих рассмотренных случаях два вида сходимости особенно важны. Интеграл от функции $f(x)$ называется абсолютно сходящимся, если интеграл от $|f(x)|$ сходится. Интеграл $\int_a^\infty f(x, y)\,dx$ называется равномерно сходящимся относительно y, если абсолютное значение интеграла $\int_n^\infty f(x, y)\,dx$ наверно меньше чем ε при $n > n_0(\varepsilon)$, где величина $n_0(\varepsilon)$ может быть указана одна и та же для всех рассматриваемых значений параметра y.

Если несобственный интеграл расходится, то иногда, все же, можно говорить о его главном значении

$$\text{v. p.} \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{или} \quad \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Именно, под главным значением (valeur principale), если оно существует, понимают предел (если он существует) подобный выше приведенному, но при симметрично выключенных особых точках или бесконечности. Таким образом, в формуле (*) надо считать $\eta = \delta$, т. е.

$$\text{v. p.} \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\eta \to +0} \left[\int_a^{c-\eta} f(x)\,dx + \int_{c+\eta}^{b} f(x)\,dx \right].$$

Точно так же:

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{N \to +\infty} \int_{-N}^{+N} f(x)\,dx.$$

Исследовать сходимость следующих интегралов:

1777. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{x^4+x+1}$.

1778. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{x^3+x+1}$.

1779. $\displaystyle\int_0^\infty \sin ax\,dx$.

1780. $\displaystyle\int_0^\infty \sin x^n\,dx, \qquad n > 0$.

1781. $\displaystyle\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx$.

1782. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^\sigma\,dx}{x^2+1}$.

1783. $\displaystyle\int_0^\infty x^\sigma \frac{x+2}{x+1}\,dx$.

1784. $\displaystyle\int_0^\infty x^m \sin x^n\,dx$.

1785. $\displaystyle\int_0^1 x^m (1-x^2)^n\,dx$.

1786. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} x^n\,dx$.

1787. $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\ln x}$.

1788. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+(\ln x)^n}$.

1789. $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\ln \sin x}{\sqrt{x}}\,dx$.

1790. $\displaystyle\int_0^\infty x^x e^{-x^n}\,dx$.

1791. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}\,dx$.

1792. $\displaystyle\int_0^\infty \sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\frac{dx}{\sqrt{x}}$.

1793. Доказать, что при $a \geqslant 0$ интегралы $\int\limits_0^\infty f(x)\,e^{-ax}\,dx$ и $\int\limits_0^\infty f(x)\,e^{-ax^2}\,dx$ равномерно сходятся, если интеграл $\int\limits_0^\infty f(x)\,dx$ сходится.

1794. Доказать, что $\lim\limits_{a\to 0}\int\limits_0^\infty f(x)\,\varphi(x,\ a)\,dx = \int\limits_0^\infty f(x)\,dx$, если интеграл в правой части имеет смысл, а $\varphi(x,\ a)$ удовлетворяет условиям:

1) $\varphi(x,\ a)\to 1$ при $a\to 0$ равномерно относительно x в любом конечном интервале $0 < x < N$;

2) при всех a, достаточно близких к нулю, $\varphi(x,\ a)$ монотонна относительно x и по абсолютной величине не превосходит некоторой постоянной.

1795. Интеграл $\int\limits_0^\infty f(x)\,dx$ — абсолютно сходящийся. Доказать, что $\int\limits_0^\infty f(x)\sin nx\,dx \to 0$ при $n\to\infty$.

1796. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^1 n^2x^{n-1}(1-x)\,dx \neq \int\limits_0^1 \lim_{n\to\infty} n^2x^{n-1}(1-x)\,dx.$$

1797. Доказать, что $\lim\limits_{y\to y_0}\int\limits_a^b f(x,\ y)\,dx = \int\limits_a^b \lim\limits_{y\to y_0} f(x,\ y)\,dx$, если $f(x,\ y)\to f(x,\ y_0)$ равномерно относительно x.

1798. Доказать, что $\lim\limits_{y\to y_0}\int\limits_0^\infty f(x,\ y)\,dx = \int\limits_0^\infty \lim\limits_{y\to y_0} f(x,\ y)\,dx$, если $f(x,\ y)\to f(x,\ y_0)$ равномерно относительно x в любом конечном интервале $(0,\ n)$ и притом $|f(x,\ y)| < F(x)$, а $\int\limits_0^\infty F(x)\,dx$ — сходящийся.

1799. Доказать, что если интеграл $\int\limits_0^\infty f(x)\,dx$ абсолютно сходится, то

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^\infty f(x)\,|\sin nx|\,dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty f(x)\,dx.$$

1800. Доказать, что $\lim\limits_{\sigma\to 0} \sigma \int\limits_0^\infty e^{-\sigma t} f(t)\,dt = \lim\limits_{t\to\infty} f(t)$, предполагая, что интеграл в левой части и предел в правой части имеют смысл.

1801. В переписке Эйлера и Лагранжа интеграл $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx$, равный $\ln\frac{b}{a}$ при $b > a > 0$, преобразуется так:

$$\int\limits_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx = \int\limits_0^\infty \frac{e^{-ax}\,dx}{x} - \int\limits_0^\infty \frac{e^{-bx}\,dx}{x}.$$

В правой части первый интеграл преобразуется подстановкой $ax = t$, а второй — подстановкой $bx = t$. После этого получается:

$$\ln\frac{b}{a} = \int\limits_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx = \int\limits_0^\infty \frac{e^{-t}\,dt}{t} - \int\limits_0^\infty \frac{e^{-t}\,dt}{t} = 0.$$

Где причина полученного абсурда?

§ 3. Вычисление определенных интегралов интегрированием и подстановками

Формула замены переменных имеет вид:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

При этом подразумевается, что при изменении t от α до β переменная $x = \varphi(t)$ монотонно изменяется от a до b. Удачное применение подстановок во многих случаях позволяет значительно упростить нахождение определенных интегралов с помощью неопределенных. Приводим несколько характерных примеров:

I. $A = \int\limits_0^\pi \frac{\sin 2nx}{\sin x}\,dx$, где n — целое. Полагая $x = \pi - u$, имеем:

$$A = -\int\limits_\pi^0 \frac{\sin(2\pi n - 2nu)}{\sin(\pi - u)}\,du = -\int\limits_0^\pi \frac{\sin 2nu}{\sin u}\,du = -A,$$

Отсюда: $2A = 0$, $A = 0$.

II. $B = \int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx$. При $x = \operatorname{tg}\varphi$ имеем:

$$B = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos\varphi + \sin\varphi)\,d\varphi - \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos\varphi\,d\varphi.$$

Полагая в последнем интеграле $\varphi = \frac{\pi}{4} - \psi$, находим:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos\varphi\,d\varphi = -\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{0} \ln\left(\cos\psi\cos\frac{\pi}{4} + \sin\psi\sin\frac{\pi}{4}\right)d\psi =$$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left[(\cos\psi + \sin\psi)\frac{1}{\sqrt{2}}\right]d\psi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos\varphi + \sin\varphi)\,d\varphi - \frac{\ln 2}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos\varphi + \sin\varphi)\,d\varphi - \frac{\pi\ln 2}{8}.$$

Подставляя в равенство для B, получаем: $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi\ln 2}{8}$.

III. $C = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\,d\varphi$. Полагая $\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi$, имеем:

$$C = -\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right)d\psi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\psi\,d\psi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\,d\varphi.$$

Поэтому

$$C = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\,d\varphi + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\,d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{\pi}{4}.$$

IV. $D = \int\limits_0^{\infty} \frac{Ax^2 + B}{x^4 + ax^2 + 1}\,dx$, где $a > -2$. Полагая $x = \frac{1}{t}$ и переименовывая потом t в x, получаем:

$$D = -\int_{\infty}^{0} \frac{\frac{A}{t^2}+B}{\frac{1}{t^4}+\frac{a}{t^2}+1}\cdot\frac{dt}{t^2} = \int_{0}^{\infty} \frac{A+Bx^2}{1+ax^2+x^4}\,dx.$$

Беря полусумму этих равенств, находим:

$$D = \frac{A+B}{2}\int_{0}^{\infty}\frac{x^2+1}{x^4+ax^2+1}\,dx = \frac{A+B}{2}\int_{0}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx}{x^2+\frac{1}{x^2}+a}.$$

Применяя подстановку $x-\frac{1}{x}=t$, окончательно получаем:

$$D = \frac{A+B}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{t^2+a+2} = \frac{A+B}{2\sqrt{a+2}}\pi.$$

Таким же образом, но после предварительной подстановки $x = u\sqrt[4]{b}$, получаем равенство:

$$\int_{0}^{\infty}\frac{Ax^2+B}{x^4+ax^2+b}\,dx = \frac{\pi}{2\sqrt[4]{b}}\,\frac{A\sqrt{b}+B}{\sqrt{a+2\sqrt{b}}}\quad;\ b>0,\ a+2\sqrt{b}>0.$$

Следующие интегралы находятся сравнительно легко, простыми подстановками и приемами, подобными предыдущим.

Доказать равенства:

1802. $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{1+x^3} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$

1803. $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$

1804. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}};\quad a>1.$

1805. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{x^4\,dx}{(x^2+1)\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}(\sqrt{2}-1).$

1806. $\displaystyle\int_{a}^{b}\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}\,x\,dx = \frac{\pi}{8}(b-a)(a+3b).$

1807. $\displaystyle\int_{0}^{a}x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{\pi a^4}{16}.$

1808. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{a+b\cos x} = 2\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$; $|b|<a$.

1809. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2-2x\cos\alpha+1} = \frac{\pi}{2|\sin\alpha|}$.

1810. $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{1+2a\cos x+a^2}} = 2$ при $|a|\leqslant 1$, $=\frac{2}{|a|}$ при $|a|>1$.

1811. $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin^2 x\,dx}{1+2a\cos x+a^2} = \frac{\pi}{2}$ при $|a|<1$, $=\frac{\pi}{2a^2}$ при $|a|>1$.

1812. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{(1-2ax+a^2)(1-2bx+b^2)}} = \frac{1}{\sqrt{ab}}\ln\frac{1+\sqrt{ab}}{1-\sqrt{ab}}$; $|a|<1$, $|b|<1$, $ab>0$.

1813. $\int\limits_0^{\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{a}{a^2+b^2}$, $a>0$.

1814. $\int\limits_0^{\infty} e^{-ax}\sin bx\,dx = \frac{b}{a^2+b^2}$, $a>0$.

1815. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x} = \frac{\pi}{2ab}$.

1816. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x)^2} = \frac{\pi}{4}\,\frac{a^2+b^2}{a^3b^3}$.

1817. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\operatorname{tg} x}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

Пользуясь формулами Эйлера

$$\cos x = \frac{e^{xi}+e^{-xi}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{xi}-e^{-xi}}{2i},$$

доказать равенства (m и n — целые положительные):

1818. $\int\limits_0^{\pi} \sin^{2n} x\,dx = \frac{\pi}{2^{2n}}\,\frac{(2n)!}{(n!)^2}$; n — целое $\geqslant 0$.

1819. $\int\limits_0^\pi \frac{\cos(4n+1)x}{\cos x}\,dx=\pi.$

1820. $\int\limits_0^\pi \frac{\sin mx}{\sin x}\,dx=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad m=2n, \\ \pi & \text{при} \quad m=2n+1. \end{cases}$

1821. $\int\limits_0^\pi \cos^n x\cos nx\,dx=\frac{\pi}{2^n}.$

1822. $\int\limits_0^\pi \cos^n x\sin nx\,dx=0.$

1823. $\int\limits_0^\pi \cos^m x\cos nx\,dx=\begin{cases} 0, \text{ если } m-n \text{ нечетное}, \\ \frac{\pi}{2^m} C_m^{\frac{m-n}{2}}, \text{ если } m-n \text{ четное}; \end{cases}$

$$C_m^k=\frac{m!}{k!\,(m-k)!};\quad m\geqslant n.$$

1824. $\int\limits_0^\infty e^{-ax}\frac{\cos(2m-1)x}{\cos x}\,dx=\frac{(-1)^{m+1}}{a}+2\sum_{n=1}^{m-1}\frac{(-1)^{m+n-1}a}{a^2+4n^2};\ a>0.$

В следующих задачах следует применять формулу многократного интегрирования по частям, которую можно написать в таком виде:

$$\int uv^{(n)}\,dx=uv^{(n-1)}-u'v^{(n-2)}+u''v^{(n-3)}+\ldots+(-1)^{\nu}u^{(\nu)}v^{(n-\nu-1)}+$$
$$+(-1)^{\nu+1}\int u^{(\nu+1)}v^{(n-\nu-1)}\,dx.$$

1825. Доказать равенства:

$$\int\limits_{-1}^{1} P_n(x)f(x)\,dx=0,\quad \int\limits_0^\infty e^{-x}L_n(x)f(x)\,dx=0,\quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H_n(x)f(x)\,dx=0,$$

где $f(x)$ — произвольный полином степени $n-1$, а полиномы Лежандра $P_n(x)$, Лагерра $L_n(x)$ и Эрмита — Чебышева $H_n(x)$ определяются равенствами:

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\,\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n};\quad L_n(x)=e^x\,\frac{d^n x^n e^{-x}}{dx^n};\quad H_n(x)=e^{x^2}\,\frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}.$$

1826. Найти при целом $n>0$ величину интеграла Эйлера:

$$\Gamma(n)=\int\limits_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\,dx.$$

1827. Найти при целых $p > 0$ и $q > 0$ величину интеграла Эйлера

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx.$$

§ 4. Нахождение интегралов с помощью формул приведения

Для интегралов, зависящих от целого положительного параметра, иногда удается найти формулу приведения, выражающую его через интеграл того же вида, но с меньшим значением параметра. Если интеграл при нулевом значении параметра удается найти, то и данный интеграл может быть найден. Так, например, для гамма-функции Эйлера $\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\,dx$, $n > 0$, интегрируя по частям, находим:

$$\Gamma(n) = \frac{1}{n}e^{-x}x^n\Big|_0^\infty + \frac{1}{n}\int_0^\infty e^{-x}x^n\,dx = \frac{1}{n}\Gamma(n+1).$$

Отсюда $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$. Применяя эту формулу несколько раз, получаем равенство:

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

Найти величины интегралов (m и n целые, положительные):

1828. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{2n} x\,dx.$ **1829.** $\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx.$ **1830.** $\int_0^\infty \frac{dx}{(a^2+x^2)^n}.$

1831. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(Ax^2+2Bx+C)^n}$, $AC - B^2 > 0.$

1832. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\,dx.$ **1833.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\,dx.$

1834. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \cos^{2m+1} x\,dx.$

1835. С помощью известного равенства $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ найти величину интеграла $\int_0^\infty e^{-x^2}x^{2n}\,dx.$

1836. Для полиномов Лежандра, Лагерра и Эрмита — Чебышева, упомянутых в задаче 1825, доказать равенства:

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}; \quad \int_{0}^{\infty} e^{-x} L_n^2(x)\,dx = (n!)^2;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^2(x)\,dx = 2^n n!\sqrt{\pi}.$$

Найти интегралы (m и n целые, положительные).

1837. $\int_0^1 x^m (\ln x)^n\,dx.$ **1838.** $\int_0^\infty x^n e^{-x} \sin x\,dx.$

1839. $\int_0^\infty x^n e^{-x} \cos x\,dx.$ **1840.** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos mx}{\cos x}\,dx = u_m.$

1841. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2m-1)x}{\cos x}\,dx.$

Замечание. В двух последних задачах полезно сложить два интеграла, у которых m отличается на одну или две единицы. В двух следующих полезно вычесть два интеграла, у которых m отличается на две единицы, и применить дважды интегрирование по частям.

1842. $\int_0^\infty e^{-ax} \sin^{2n} x\,dx, \quad a > 0.$

1843. $\int_0^\infty e^{-ax} \sin^{2n+1} x\,dx, \quad a > 0.$

1844. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-mx} \cos^{2n+1} x\,dx.$

1845. $\int_0^\infty e^{-ax^2} \frac{\cos(2n+1)x}{\cos x}\,dx, \quad a > 0.$

1846. Доказать равенство:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin mx}{\sin x}\,dx = \frac{\pi}{2} - 2\cos\frac{m\pi}{2}\int_0^1 \frac{x^m\,dx}{1+x^2},$$

проверив его при $m=0$ и $m=1$, и установив, что при возрастании m на две единицы обе части равенства изменяются на одинаковую величину.

1847. Найти интеграл $U_m = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x\cdot\cos 2mx\,dx$, установив линейное соотношение между U_m и U_{m-1}.

§ 5. Интегрирование с помощью рядов

Не всякий ряд можно интегрировать почленно. Иными словами, равенство

$$\int_a^b [u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\ldots]\,dx = \int_a^b u_1(x)\,dx + \int_a^b u_2(x)\,dx + \int_a^b u_3(x)\,dx + \ldots$$

не всегда верно. Так, например, если положить

$u_1(x)=\cos x,\ \ u_2(x)=(2\sin x-1)\cos x,\ \ u_3(x)=(3\sin^2 x-2\sin x)\cos x\ldots$

и, вообще,

$$u_n(x) = [n\sin^{n-1}x-(n-1)\sin^{n-2}x]\cos x,$$

то $S=u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\ldots$ равна нулю при любом x, как в этом нетрудно убедиться, изучая S_n. Поэтому в данном случае имеем:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} [u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\ldots]\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0\cdot dx = 0.$$

С другой стороны, непосредственное вычисление показывает, что

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} u_1(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = 1,$$

при $n>1$ имеем:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} u_n(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [n\sin^{n-1}x-(n-1)\sin^{n-2}x]\cos x\,dx = 1-1=0.$$

Поэтому

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} u_1(x)\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} u_2(x)\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} u_3(x)\,dx + \ldots = 1 + 0 + 0 \ldots = 1.$$

Таким образом, в данном случае равенство, приведенное в начале параграфа, неверно.

Существует теорема, гарантирующая законность интегрирования почленно: если в сегменте $[a, b]$ ряд $u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots$ сходится равномерно, то его можно интегрировать почленно. Отсюда в частности, следует, что ряд, расположенный по степеням какой-нибудь переменной, можно интегрировать почленно, если при изменении x в сегменте интегрирования указанная переменная остается внутри области сходимости степенного ряда.

Общий метод для выяснения законности интегрирования почленно состоит в том, что сумму ряда $S(x)$ представляют в виде $S(x) = S_n(x) + R_n(x)$, где $S_n(x)$ — сумма n первых членов ряда. Необходимое и достаточное условие законности интегрирования в пределах от a до b состоит в том, что $\int_a^b R_n(x)\,dx \to 0$ при $n \to \infty$. Это условие пригодно и в случае бесконечных пределов интегрирования.

Следующие задачи решаются с помощью разложения в ряд по степеням некоторого переменного подынтегральной функции или одного из ее множителей.

Вычислить величины интегралов с точностью до 10^{-5}:

1848. $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx.$

1849. $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx.$

1850. $\int_5^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4 - 1}}.$

1851. $\int_{100}^{\infty} \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x^4 - 1}}.$

1852. $\int_3^{\infty} \frac{x\,dx}{e^x - 1}.$

1853. $\int_0^{\frac{1}{2}} \ln\frac{1 + x^2}{1 - x^2}\,\frac{dx}{x^2}.$

1854. $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{\ln x}{x - 1}\,dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1 + t)}{t}\,dt.$

1855. Выразить рядом, расположенным по степеням эксцентриситета, длину контура эллипса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

1856. Скорость тяжелой точки, соскользнувшей по какой-нибудь кривой с высоты h на высоту y, равна $\sqrt{2g(h - y)}$. Поэтому период колебания маятника, длины l, совершающего колебания с углом максимального отклонения α, выражается формулой:

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^\alpha \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\alpha}} = 4\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^\alpha \frac{d\varphi}{\sqrt{2\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}\right)}}.$$

Отсюда, после подстановки $\sin\frac{\varphi}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}\sin\psi$, получается:

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-\sigma^2\sin^2\psi}}; \quad \sigma = \sin\frac{\alpha}{2}.$$

Разлагая по степеням σ и интегрируя почленно, получим формулу:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\sin^4\frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2\sin^6\frac{\alpha}{2} + \ldots\right].$$

Следующие задачи основаны на знании трех рядов Эйлера:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}; \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}; \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Найти величины интегралов:

1857. $\int_0^1 \frac{\ln x\,dx}{1-x^2}$.

1858. $\int_0^1 \ln\frac{1+x}{1-x}\frac{dx}{x}$.

1859. $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx$.

1860. $\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\,dx$.

1861. $\int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x-1}$.

1862. $\int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x+1}$.

1863. $\int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^{ax}-e^{-ax}}$.

1864. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\ln \operatorname{tg} x)^2\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\ln \operatorname{tg} x)^2\,dx$.

1865. Доказать, что

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx = 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} - \ldots$$

1866. Доказать равенство, справедливое при любом a:

$$2\int_0^\infty e^{-x^2}\sin ax\,dx=\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n n!}{(2n+1)!}a^{2n+1}.$$

1867. Пользуясь формулой $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}x^{2n}\,dx=\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2^{n+1}}\sqrt{\pi}$, доказать равенство:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2ax\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!}a^{2n}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-a^2}\quad \text{(Лаплас)}.$$

1868. Пользуясь тождеством

$$\frac{1}{a+x}=\frac{1}{a}-\frac{x}{a^2}+\frac{x^2}{a^3}-\ldots-\frac{x^{2n-1}}{a^{2n}}+\frac{x^{2n}}{a^{2n}(a+x)},$$

доказать формулу

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{a+x}=\frac{1}{a}-\frac{1!}{a^2}+\frac{2!}{a^3}-\ldots-\frac{(2n-1)!}{a^{2n}}+\frac{\theta\cdot(2n)!}{a^{2n+1}};\quad 0<\theta<1,$$

весьма удобную для вычисления интегралов в левой части, если a положительно и велико.

1869. Формула Тэйлора с остаточным членом Лагранжа для функции $(1+x)^{-m}$ пригодна при любом $x>-1$. Пользуясь этим, доказать равенство:

$$\int_a^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{x^m}=e^{-a}\left[\frac{1}{a^m}-\frac{m}{a^{m+1}}+\frac{m(m+1)}{a^{m+2}}-\ldots+\right.$$
$$\left.+(-1)^n\frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{a^{m+n}}+\theta R\right],$$

где $0<\theta<1$, $R=(-1)^{n+1}\frac{m(m+1)\ldots(m+n)}{a^{m+n+1}}$; $m>0$, $a>0$.

1870. Доказать равенство:

$$\int_a^\infty e^{-x^2}\,dx=\frac{e^{-a^2}}{2a}\left[1-\frac{1}{2a^2}+\frac{1\cdot 3}{(2a^2)^2}-\ldots+\right.$$
$$\left.+(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{(2a^2)^n}+\theta R\right];$$

$0<\theta<1$, $a>0$, $R=(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n+1)}{(2a^2)^{n+1}}$.

В ряде вопросов имеют большое значение тригонометрические ряды, имеющие вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Имеет место теорема: если сумма тригонометрического ряда есть функция $\varphi(x)$, интегрируемая в смысле Римана, то равенство:

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (*)$$

можно интегрировать почленно, хотя бы ряд в правой части и не был равномерно сходящимся. Достойно внимания и другое обстоятельство. Умножая равенство (*) на другое равенство того же типа:

$$\psi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (\alpha_m \cos mx + \beta_m \sin mx),$$

можем формально написать:

$$\varphi(x)\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)(\alpha_m \cos mx + \beta_m \sin mx).$$

Двойной ряд в правой части не обязан быть сходящимся. Тем не менее это формальное равенство в целом интервале $(0, 2\pi)$ можно интегрировать почленно. При этом получится верное равенство:

$$\int_0^{2\pi} \varphi(x)\psi(x)\,dx = 2\pi a_0\alpha_0 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_n\alpha_n + b_n\beta_n).$$

В частности, при $\psi(x) = \varphi(x)$ имеем формулу:

$$\int_0^{2\pi} \varphi^2(x)\,dx = 2\pi a_0^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right).$$

Следующие задачи основаны на разложении в ряды трех функций:

$$\frac{\sin x}{1 - 2a\cos x + a^2} = \sin x + a \sin 2x + a^2 \sin 3x + \ldots,$$

$$\ln(1 - 2a\cos x + a^2) = -2\left[a\cos x + \frac{a^2}{2}\cos 2x + \frac{a^3}{3}\cos 3x + \ldots\right],$$

$$\frac{1 - a^2}{1 - 2a\cos x + a^2} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos nx.$$

В этих разложениях предполагается, что $|a| < 1$.

Найти величины следующих интегралов (m и n — целые, положительные):

1871. $\int\limits_0^{\pi} \frac{\cos mx\, dx}{1-2a\cos x+a^2}, \quad a \neq \pm 1.$

1872. $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x \sin mx}{1-2a\cos x+a^2}\, dx.$

1873. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos mx}{1-a\cos x}\, dx, \ |a|<1.$ $\left(\text{Положить } a=\frac{2\alpha}{1+\alpha^2}.\right)$

1874. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos mx}{1-a\cos x}\, x\, dx, \ |a|<1.$

1875. $\int\limits_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1-2a\cos x+a^2}\, dx, \ |a|<1.$

1876. $\int\limits_0^{\pi} \ln(1-2a\cos x+a^2)\, dx.$

1877. $\int\limits_0^{2\pi} \sin nx \ln(1-2a\cos x+a^2)\, dx.$

1878. $\int\limits_0^{\pi} \ln(1-2a\cos x+a^2)\cos mx\, dx.$

1879. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\, dx.$

1880. $\int\limits_0^{\pi} x\ln\sin x\, dx.$

1881. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2mx \ln\sin x\, dx.$

1882. $\int\limits_0^{\pi} \frac{(1-a^2)(1-b^2)\, dx}{(1-2a\cos nx+a^2)(1-2b\cos mx+b^2)}$, m и n — целые, $|a|<1$, $|b|<1$.

1883. $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin^2 x\,dx}{(1-2a\cos x+a^2)(1-2b\cos x+b^2)}$; $|a|<1$, $|b|<1$.

1884. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln^2 \sin x\,dx$.

В следующих трех задачах полезно применить два интеграла Лапласа:

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{\cos ax\,dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} e^{-|a|}; \quad \int\limits_0^{\infty} \frac{x\sin ax}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} e^{-|a|} \operatorname{sign} a.$$

1885. $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+2a\cos mx+a^2)}$; $|a|<1$.

1886. $\int\limits_0^{\infty} \frac{x\sin mx}{(1+x^2)(1+2a\cos mx+a^2)}\,dx$; $|a|<1$.

1887. $\int\limits_0^{\infty} \ln(1-2a\cos x+a^2)\frac{dx}{1+x^2}$; $|a|<1$.

Кроме разложений степенных и тригонометрических, в некоторых случаях применяются разложения в ряды рациональных дробей. Из формул такого рода отметим следующие:

$$\frac{1}{\sin^2 x} = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x+n\pi)^2}; \quad \operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2-\pi^2 n^2};$$

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} - \frac{2x}{x^2-\pi^2} + \frac{2x}{x^2-4\pi^2} - \frac{2x}{x^2-9\pi^2} + \dots;$$

$$\frac{1}{\cos x} = -\frac{\pi}{x^2-\frac{\pi^2}{4}} + \frac{3\pi}{x^2-\frac{9\pi^2}{4}} - \frac{5\pi}{x^2-\frac{25\pi^2}{4}} + \dots;$$

$$\frac{1}{e^x-1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2+4\pi^2 n^2};$$

$$\frac{1}{\operatorname{sh} x} = \frac{1}{x} - \frac{2x}{x^2+\pi^2} + \frac{2x}{x^2+4\pi^2} - \frac{2x}{x^2+9\pi^2} + \dots;$$

$$\frac{1}{e^x+1} = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2+(2n+1)^2\pi^2}.$$

С помощью указанных формул доказываются следующие равенства:

1888. $$2\int_0^\infty \frac{\sin ux\,du}{e^{2\pi u}-1}=\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}.$$

1889. $$2\int_0^\infty \frac{\sin ux\,du}{e^u+1}=\frac{1}{x}-\frac{\pi}{\operatorname{sh}\pi x}.$$

1890. $$2\int_0^\infty \frac{t\operatorname{ch}xt}{e^{\pi t}-1}dt=\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2};\quad |x|<\pi.$$

1891. $$\int_0^\infty \frac{2\operatorname{sh}xt}{e^{\pi t}-1}dt=\frac{1}{x}-\operatorname{ctg}x;\quad |x|<\pi.$$

§ 6. Дифференцирование и интегрирование под знаком интеграла

Формула дифференцирования по параметру имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_a^b f(x, y)\,dx=\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}\,dx.$$

Она справедлива, если $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывна по y, равномерно относительно x. Она остается в силе и для несобственных интегралов при соответствующих условиях. Например, она имеет место, если интеграл в левой части сходится при данном y, а интеграл в правой части равномерно сходится для значений y, равных данному и близких к нему.

Формула интегрирования под знаком интеграла имеет вид:

$$\int_a^b\left[\int_a^\beta f(x, y)\,dx\right]dy=\int_a^\beta\left[\int_a^b f(x, y)\,dy\right]dx.$$

Эта формула равносильна с переменой порядка интегрирования в двойном интеграле. Она справедлива для функций, интегрируемых в смысле Римана. При соответствующих дополнительных условиях она остается в силе и для несобственных интегралов.

Третья операция, близкая к предыдущим, состоит в предельном переходе под знаком интеграла:

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x, y)\,dx=\int_a^b \lim_{y\to y_0} f(x, y)\,dx.$$

Для ее законности достаточно, чтобы $f(x, y)$ стремилась к пределу равномерно относительно x. Она справедлива и для несобственных интегралов, если соблюдаются соответствующие дополнительные условия.

Условия законности трех указанных операций для несобственных интегралов сравнительно сложны. Было бы затруднительно выразить их коротко и вместе с тем достаточно полно и точно. Отметим, что они подробно рассмотрены в книге: Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального интегрального исчисления, т. II, Г.Т.Т.И, 1948.

Приводим несколько классических интегралов в виде примеров.

$$\text{I.}\quad \int_0^\infty \frac{x^{p-1}dx}{1+x} \quad \text{при } 0<p<1.$$

Имеем равенство:

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}dx}{1+x} = \int_0^1 \frac{x^{p-1}dx}{1+x} + \int_1^\infty \frac{x^{p-1}dx}{1+x}.$$

В первом из них величину $\frac{1}{1+x}$ заменяем рядом $1-x+x^2-x^3+\ldots$, а во втором — рядом $\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4}+\ldots$ Интегрируя почленно, получаем:

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}\,dx}{1+x} = \left[\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}+\frac{1}{p+2}-\frac{1}{p+3}+\ldots\right]+$$
$$+\left[\frac{1}{1-p}-\frac{1}{2-p}+\frac{1}{3-p}-\frac{1}{4-p}+\ldots\right]=$$
$$=\frac{1}{p}-\frac{2p}{p^2-1}+\frac{2p}{p^2-2^2}-\frac{2p}{p^2-3^2}+\ldots=\frac{\pi}{\sin \pi p}.$$

Законность почленного интегрирования здесь можно доказать, хотя ряды и не сходятся равномерно.

$$\text{II.}\quad \int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx, \quad 0<a<b.$$

Исходим из равенства: $\int_0^\infty e^{-xy}\,dx = \frac{1}{y}$; $y>0$. Интегрируя по y в интервале от a до b, получаем:

$$\int_0^\infty \left[\int_a^b e^{-xy}\,dy\right] dx = \int_a^b \frac{dy}{y}.$$

Отсюда следует равенство:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx = \ln\frac{b}{a}.$$

Интегрирование под знаком интеграла законно, так как при $0 < a \leqslant y \leqslant b$ интеграл $\int\limits_0^\infty e^{-xy}\,dx$ сходится равномерно

III. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\,dx.$

Исходим из равенства $\int\limits_0^\infty e^{-\alpha x}\cos\beta x\,dx = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}$, которое получается при $\alpha > 0$ непосредственным интегрированием. Интегрируя по β от 0 до a, получаем:

$$\int\limits_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin ax}{x}\,dx = \int\limits_0^a \frac{\alpha\,d\beta}{\alpha^2+\beta^2} = \operatorname{arctg}\frac{a}{\alpha}. \qquad (*)$$

Интеграл $\int\limits_0^\infty e^{-\alpha x}\cos\beta x\,dx$ при данном $\alpha > 0$ сходится равномерно для любых вещественных β. Поэтому интегрирование под знаком интеграла законно.

В равенстве (*) при $a > 0$ будем приближать α к нулю. Интеграл в левой части сходится при $\alpha \geqslant 0$ равномерно. Поэтому предел интеграла равен интегралу от предела и из (*) получается при $\alpha \to 0$, $\alpha > 0$:

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

При $a < 0$ таким же приемом получили бы $-\frac{\pi}{2}$, а при $a = 0$ и интеграл равен нулю. Применяя обозначение Кронекера, можем написать:

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\operatorname{sign} a.$$

Здесь $\operatorname{sign} a = +1$, если $a > 0$, $= -1$, если $a < 0$ и $= 0$, если $a = 0$.

IV. Интегралы Лапласа $\int\limits_0^\infty \frac{\cos ax}{1+x^2}\,dx$ и $\int\limits_0^\infty \frac{x\sin ax}{1+x^2}\,dx.$

Пусть $a > 0$ и положим: $y = \int\limits_0^\infty \frac{\cos ax}{1+x^2}\,dx.$ Дифференцируя по параметру a, имеем: $y' = -\int\limits_0^\infty \frac{x\sin ax}{1+x^2}\,dx.$ Дальнейшее дифференцирование непосредственно невозможно, так как получится не сходящийся интеграл. Складывая с полученным равенством новое равенство: $\frac{\pi}{2}=\int\limits_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\,dx$, получаем: $y'+\frac{\pi}{2}=\int\limits_0^\infty \frac{\sin ax}{x(1+x^2)}\,dx$. Дифференцировать теперь можно. Это дает равенство: $y''=\int\limits_0^\infty \frac{\cos ax}{1+x^2}\,dx$ или $y''=y$. Отсюда следует, что $y=Ce^a+C_1e^{-a}$, где C и C_1 — некоторые постоянные. Так как $|y|<\int\limits_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$, или $\frac{\pi}{2}$, то $C=0$ и $y=C_1e^{-a}$. При $a\to 0$ получаем: $\frac{\pi}{2}=C_1$. Поэтому $y=\frac{\pi}{2}e^{-a}$; $y'=-\frac{\pi}{2}e^{-a}$. Отсюда следуют равенства:

$$\int\limits_0^\infty \frac{\cos ax}{1+x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}\,e^{-|a|},\quad \int\limits_0^\infty \frac{x\sin ax}{1+x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}\,e^{-|a|}\operatorname{sign} a.$$

V. Интеграл Эйлера $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\,dx$.

Исходим из очевидных неравенств:

$$\iint\limits_{S_1} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy<\int\limits_{-n}^{n}\int\limits_{-n}^{n} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy<\iint\limits_{S_2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy;$$

здесь S_2 — площадь круга $x^2+y^2=2n^2$, а S_1 — площадь круга $x^2+y^2=n^2$. Интегралы, взятые по S_1 и S_2, легко вычисляются введением полярных координат и оказываются равными $\pi(1-e^{-n^2})$ и $\pi(1-e^{-2n^2})$. Оба они $\to\pi$ при $n\to\infty$. С другой стороны, имеем:

$$\int\limits_{-n}^{n}\int\limits_{-n}^{n} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy=\int\limits_{-n}^{n} e^{-x^2}\,dx\int\limits_{-n}^{n} e^{-y^2}\,dy=\left(\int\limits_{-n}^{n} e^{-x^2}\,dx\right)^2.$$

Из сравнения со сказанным следуют равенства:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi},\quad \int\limits_0^\infty e^{-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

VI. Интеграл Лапласа $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\cos 2ax\,dx$.

Обозначая его через y и дифференцируя по a, получаем:

$$y' = -2\int_0^\infty e^{-x^2}\sin 2ax\cdot x\,dx.$$

Интеграл в правой части интегрируем по частям, полагая $-2e^{-x^2}x\,dx = dv$, $\sin 2ax = u$. После этого получаем:

$$y' = \sin 2ax\cdot e^{-x^2}\Big|_0^\infty - 2a\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2ax\,dx;\qquad y' = -2ay.$$

Интегрируя полученное дифференциальное уравнение, находим: $y = Ce^{-a^2}$.
Так как при $a = 0$ интеграл Лапласа обращается в интеграл Эйлера, равный $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, то $C = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Поэтому:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2ax\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-a^2}.$$

VII. Интегралы Френеля $\int_0^\infty \sin x^2\,dx$ и $\int_0^\infty \cos x^2\,dx$ подстановкой $x = \sqrt{t}$ переходят в такие: $\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt$ и $\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\,dt$. С другой стороны, заменяя x на $\sqrt{ut}$ в интеграле Эйлера, находим: $\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{t}}{2}\int_0^\infty \frac{e^{-ut}\,du}{\sqrt{u}}$.

Поэтому $\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{e^{-ut}\,du}{\sqrt{u}}$. После этого можем написать:

$$\int_0^\infty \sin x^2\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \sin t\,dt\int_0^\infty \frac{e^{-ut}\,du}{\sqrt{u}}.$$

Переменяя порядок интегрирования, получаем:

$$\int_0^\infty \sin x^2\,dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{u}}\int_0^\infty e^{-ut}\sin t\,dt = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{u}\,(1+u^2)} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\pi}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{8}}.$$

Для оправдания законности перестановки порядка интегрирования можно рассмотреть при $\alpha > 0$ равенство:

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\alpha t}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-\alpha t}\sin t\,dt\int_0^\infty \frac{e^{-ut}\,du}{\sqrt{u}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{u}}\int_0^\infty e^{-(u+\alpha)t}\sin t\,dt = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{u}[1+(u+\alpha)^2]}.$$

Здесь легко доказывается законность перехода к пределу при $\alpha \to 0$, что приводит к предыдущему результату. Таким же образом получается и другой интеграл Френеля. Окончательно получаем:

$$\int_0^\infty \sin x^2\,dx = \int_0^\infty \cos x^2\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

VIII. Разрывной множитель Дирихле, т. е. интеграл $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin x\cos ax}{x}\,dx.$

Можем написать:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin x\cos ax}{x}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin(1+a)x}{x}\,dx + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin(1-a)x}{x}\,dx,$$

так как оба последних интеграла имеют смысл — они уже вычислены. Поэтому

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin x\cos ax}{x}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{sign}(1+a) + \frac{1}{2}\operatorname{sign}(1-a).$$

Если $-1 < a < 1$, то интеграл Дирихле равен единице. При a, лежащем вне сегмента $[-1, 1]$, он равен нулю, а при $a = \pm 1$ он равен $\frac{1}{2}$.

Задачи этого параграфа решаются дифференцированием или интегрированием по параметру и при случае опираются на результаты рассмотренных примеров.

1892. Исходя из равенства $\int_0^\infty e^{-ax}\,dx = \frac{1}{a}$, где $a > 0$, найти при n целом и положительном величину интеграла $\int_0^\infty e^{-ax}x^{n-1}\,dx$.

1893. Исходя из равенства $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{2a}$, найти величину интеграла $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$.

1894. Исходя из равенства $\int\limits_0^\infty e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$, $a>0$, найти интеграл $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x^2}\,dx$ при $b>a>0$.

1895. Исходя из равенства $\int\limits_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\operatorname{sign} a$, найти величину интеграла $\int\limits_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}\,dx$.

Найти величины интегралов:

1896. $\int\limits_0^\infty \frac{Ae^{-\alpha x}+Be^{-\beta x}+Ce^{-\gamma x}+De^{-\delta x}}{x}\,dx$; $A+B+C+D=0$, $\alpha>0$, $\beta>0$, $\gamma>0$, $\delta>0$.

1897. $\int\limits_0^\infty \left(\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\right)^2 dx$; $\alpha>0$, $\beta>0$.

1898. $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\sin mx\,dx$; $\alpha>0$, $\beta>0$.

1899. $\int\limits_0^\infty e^{-\left(x^2+\frac{a}{x^2}\right)}\,dx$; $a>0$ (Лаплас).

1900. $\int\limits_0^\infty \left(e^{-\frac{a^2}{x^2}}-e^{-\frac{b^2}{x^2}}\right)dx$.

1901. $\int\limits_0^\infty e^{-ax}\sin^2 bx\,\frac{dx}{x}$; $a>0$.

1902. $\int\limits_0^\infty e^{-ax}\sin^2 bx\,\frac{dx}{x^2}$; $a>0$.

1903. $\int\limits_0^\infty xe^{-a^2x^2}\sin 2bx\,dx$.

1904. $\int\limits_0^\infty x^{2n}e^{-x^2}\cos 2\beta x\,dx$.

1905. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-ax^2}-\cos bx}{x^2}\,dx;\quad a>0,\ b>0.$

1906. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln(x^2+a^2)}{x^2+b^2}\,dx.$

1907. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-a^2x^2)\,dx}{x^2\sqrt{1-x^2}};\ a^2<1.$

1908. $\displaystyle\int_0^\alpha \frac{\ln(1+\alpha x)}{1+x^2}\,dx.$

1909. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-\alpha x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx;\ |\alpha|<1.$

1910. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx;\ |\alpha|<1.$

1911. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos^2 x+m^2\sin^2 x)\,dx.$

1912. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{1+a\sin x}{1-a\sin x}\,\frac{dx}{\sin x};\quad |a|<1.$

1913. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1+a\cos x)}{\cos x}\,dx,\quad |a|<1.$

1914. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(a\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}\,dx.$

1915. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}\alpha x}{x(1+\beta^2x^2)}\,dx.$

1916. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}\alpha x\cdot\operatorname{arctg}\beta x}{x^2}\,dx.$

1917. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln(1+\alpha^2x^2)\cdot\operatorname{arctg}\beta x}{x^3}\,dx$

1918. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln(1+a^2x^2)\ln(1+b^2x^2)}{x^2}\,dx.$

1919. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos ax+\cos bx-2}{x^2}\,dx.$

Доказать равенства:

1920. $\displaystyle\int_0^x e^{-x^2}\,dx=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-t^2}\,\frac{\sin 2tx}{t}\,dt.$

1921. $\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt=e^{x^2}\int_0^\infty e^{-t^2}\sin 2xt\,dt.$

1922. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln(1+\alpha x)}{1+x^2}\,dx=\frac{\pi}{4}\ln(1+\alpha^2)-\int_0^\alpha \frac{\ln\alpha}{1+\alpha^2}\,d\alpha;\ \alpha>0.$

1923. $\left(\int\limits_0^x e^{-t^2}\,dt\right)^2 = \frac{\pi}{4} - \int\limits_0^1 \frac{e^{-x^2(u^2+1)}\,du}{1+u^2}$.

§ 7. Эйлеровы интегралы

Желая найти функцию, удовлетворяющую функциональному уравнению $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$, Эйлер угадал, что такой функцией является предел бесконечного произведения:

$$\Gamma(p) = \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}{p(p+1)\ldots(p+n)}\,n^p.$$

Отсюда $\Gamma(p) = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n x^{p-1}\,dx$ при $p>1$ и, выполняя предельный переход под знаком интеграла:

$$\Gamma(p) = \int\limits_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\,dx.$$

Если n — целое положительное, то

$$\Gamma(n) = (n-1)! = 1\cdot 2\ldots(n-1);\quad \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}.$$

Одно из основных свойств гамма-функции $\Gamma(x)$ выражается равенством:

$$\Gamma(p)\,\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin\pi p},$$

другое, найденное Гауссом, а в частном случае, при $n=2$, Лежандром, — формулой:

$$\Gamma(p)\,\Gamma\left(p+\frac{1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(p+\frac{n-1}{n}\right) = n^{\frac{1}{2}-np}\,(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\,\Gamma(np).$$

Через гамма-функции выражается другой интеграл Эйлера — бэта-функция $B(p, q)$. По определению, при $p>0$ и $q>0$ имеем:

$$B(p, q) = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx.$$

Существует формула:

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Заменой переменных к бэта-функции сводятся интегралы вида

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^m}{(a+bx^n)^p}\,dx \quad \text{при} \quad a>0 \text{ и } b>0.$$

Часто полезна замена дроби $\frac{1}{a^n}$, где $n>0$, $a>0$ с помощью формулы:

$$\frac{1}{a^n}=\frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty e^{-ax}x^{n-1}\,dx.$$

Доказать равенства при целых положительных n и m:

1924. $\int_0^\infty \frac{\sin^{2m} x}{x^p}\,dx=\frac{(2m)!}{\Gamma(p)}\int_0^\infty \frac{t^{p-2}\,dt}{(t^2+2^2)(t^2+4^2)\ldots(t^2+4m^2)}$, $1<p<2m+1$.

1925. $\int_0^\infty \frac{\sin^{2m+1} x}{x^p}\,dx=\frac{(2m+1)!}{\Gamma(p)}\int_0^\infty \frac{t^{p-1}\,dt}{(t^2+1)(t^2+3^2)\ldots[t^2+(2m+1)^2]}$, $0<p<2m+2$.

1926. $\int_0^\infty \frac{\sin x\,dx}{x+a}=\int_0^\infty \frac{e^{-at}\,dt}{1+t^2}$; $a>0$.

1927. $\int_0^\infty \frac{\cos x\,dx}{x+a}=\int_0^\infty \frac{te^{-at}\,dt}{1+t^2}$; $a>0$.

1928. $\int_0^\infty \left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)e^{-nx}\sin nx\,dx=4n^2\int_0^\infty \frac{x\,dx}{(x^4+4n^4)(e^{2\pi x}-1)}$.

Найти величину интегралов:

1929. $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$.

1930. $\int_0^\infty \frac{\sin^4 x}{x^2}\,dx$.

1931. $\int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x}\,dx$.

1932. $\int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x^2}\,dx$.

1933. $\int_0^\infty \frac{\sin^4 x}{x^3}\,dx$.

1934. $\int_0^1 x\sqrt[3]{1-x^3}\,dx$.

1935. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{(1+x)^2(1-x)}}$.

1936. $\int_0^1 \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt[3]{x(1-x^2)}}$.

1937. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}$.

1938. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

1939. $\int_0^\infty \frac{x^{2\alpha-1}}{1+x^2}dx;\ 0<\alpha<1.$ **1940.** $\int_0^\infty \frac{x\,dx}{(1+x^3)^2}.$

1941. $\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n}.$

1942. $\int_0^\infty \frac{x^m\,dx}{(a+bx^n)^p};\ a>0,\ b>0,\ np>m+1>0.$

1943. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{tg}^{2a-1}x\,dx;\ 0<a<1.$ **1944.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx;\ n>-1.$

1945. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1}x\cos^{n-1}x\,dx;\ m>0,\ n>0.$

1946. $\int_0^{\pi} \frac{\sin^{n-1}\varphi\,d\varphi}{(1-k\sin\varphi)^n};\ 0<k<1,\ n>0.$

1947. $\int_0^1 \frac{x^{a-1}-x^{-a}}{1-x}dx;\ 0<a<1.$

1948. $\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{(x+a)^{\alpha+\beta}}dx;\ \alpha>0,\ \beta>0,\ a>0.$

1949. $\int_0^\infty \frac{x^{a-1}-x^{b-1}}{(1+x)\ln x}dx.$

1950. $\int_0^\infty \frac{x^{m-1}\,dx}{1+x^n};\ m>0,\ n>m.$

1951. $\int_0^1 \frac{x^{a-1}}{(1+x)^2}dx;\ 0<a<2.$

1952. $\int_0^\infty \frac{x^a\ln x}{1+x^2}dx;\ -1<a<1.$ **1953.** $\int_0^\infty \frac{x^a\ln^2 x}{1+x^2}dx;\ a^2<1.$

1954. $\int_0^\infty \frac{\mathrm{sh}\,\mu x}{\mathrm{sh}\,\nu x}dx;\ \nu>\mu>0.$ **1955.** $\int_0^\infty \frac{\mathrm{ch}\,\mu x}{\mathrm{ch}\,\nu x}dx;\ \nu>\mu>0,$

1956. $\int\limits_0^1 \ln \Gamma(x)\,dx.$ **1957.** $\int\limits_a^{a+1} \ln \Gamma(x)\,dx;\quad a > 0.$

Доказать равенства:

1958. $\int\limits_0^\infty e^{-x^4}\,dx \int\limits_0^\infty x^2 e^{-x^4}\,dx = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}.$

1959. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \int\limits_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\pi}{4}.$

1960. $\int\limits_0^\infty x^{p-1} \cos ax\,dx = \frac{1}{a^p}\Gamma(p)\cos\frac{\pi p}{2};\quad 0 < p < 1.$

1961. $\int\limits_0^\infty x^{p-1} \sin ax\,dx = \frac{1}{a^p}\Gamma(p)\sin\frac{\pi p}{2};\quad -1 < p < 1.$

1962. $\int\limits_0^\infty \frac{x^{p-\frac{3}{2}}\,dx}{(x^2+ax+b)^p} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{b}\,(a+2\sqrt{b})^{p-\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\Gamma\left(p-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(p)};\ b > 0,$
$a + 2\sqrt{b} > 0,\ p > \frac{1}{2}.$

1963. Найти площадь, ограниченную кривой $x^n + y^n = a^n$, при $x > 0,\ y > 0,\ n > 0.$

1964. Найти объем, ограниченный поверхностью $x^n+y^n+z^n=a^n$, при $x > 0,\ y > 0,\ z > 0,\ n > 0.$

§ 8. Разные задачи

1965. Если $F(x) = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$, то $F'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$. Справедливо ли равенство: $\int\limits_a^b -\frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg}\frac{1}{b} - \operatorname{arctg}\frac{1}{a}$?

1966. Если $F(x) = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$, то $F'(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2} = f(x).$

Когда справедливо равенство:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) - 1?$$

1967. Доказать, что $\int\limits_0^\infty (\sin^2 x)^{x^3} x^\alpha\, dx$ сходится при $0 \leqslant \alpha < \frac{1}{2}$, хотя подынтегральная функция положительна и не стремится к нулю, когда $x \to \infty$, ибо при сколь угодно больших значениях x может иметь сколь угодно большие значения.

Доказать равенства:

1968. $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^\infty e^{-x^n}\, dx = 1.$

1969. $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^\infty \frac{1+x^n}{1+x^{2n}}\, dx = 1.$

1970. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(1 - \int\limits_0^\infty e^{-x^n}\, dx\right) = -\Gamma'(1).$

1971. $\lim\limits_{\alpha\to 0} \alpha \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x+u)\, du}{\alpha^2+u^2} = \pi\, \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2},$

если интеграл абсолютно сходящийся, а $f(x+0)$ и $f(x-0)$ — правый и левый пределы $f(\xi)$ при $\xi \to x$.

1972. $\int\limits_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\, dx = f(0) \ln \frac{b}{a}$, $a > 0$, $b > 0$, если при $A > 0$ интеграл $\int\limits_A^\infty \frac{f(x)}{x}\, dx$ имеет смысл.

1973. $\lim\limits_{a\to\infty} a^n \int\limits_0^\infty f(x) \cos ax\, dx = 0$, если $f(x)$ — четная функция, у которой интеграл от модуля $f^{(m)}(x)$ в интервале $(-\infty, \infty)$ имеет смысл при любом $m \leqslant n+1$.

1974. $\lim\limits_{a\to\infty} a^n \int\limits_0^\infty f(x) \sin ax\, dx = 0$, если $f(x)$ — нечетная функция, а интеграл от абсолютного значения $f^{(m)}(x)$, взятый от $-\infty$ до $+\infty$, имеет смысл при любом $m \leqslant n+1$.

1975. Доказать, что $f(x)=0$ при $a<x<b$, если $f(x)$ непрерывна и при любом целом $n \geqslant 0$ интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,x^n\,dx=0$.

1976. Доказать, что $f(x)=0$ при $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, если она непрерывна, и при любом целом положительном n (и при $n=0$) интегралы $\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos nx\ dx$ и $\int\limits_0^{2\pi} f(x)\sin nx\ dx$ равны нулю.

1977. Доказать, что для $f(x)=e^{-\sqrt[4]{x}}\sin\sqrt[4]{x}$ при всех целых $n \geqslant 0$ справедливо равенство: $\int\limits_0^{\infty} f(x)\,x^n\,dx=0$.

1978. Доказать, что для функции $f(x)=\frac{1-\cos x}{x}$ при любом целом $n \neq 1$ справедливы равенства:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos nx\,dx=0, \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin nx\,dx=0.$$

1979. Доказать равенство:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha}(x+h)^{1-\alpha}}=\ln\frac{1}{h}+A+O(h),$$

где $O(h)$ означает величину, отношение которой к h остается ограниченным по абсолютному значению, когда $h \to +0$ и $0<\alpha<1$.

1980. Доказать, что по абсолютному значению интеграл $\int\limits_a^b \varphi(x)\,e^{i\mu x}\,dx$ не превосходит величины $\frac{2\varphi(a)}{\mu}$, если $a<b$, а $\varphi(x)$ — убывающая положительная функция; $\mu>0$.

Доказать неравенства:

1981. $\int\limits_0^{\infty} f(x)\sin ax\,dx>0$, если $f(x)$ — убывающая функция; $a>0$ и интеграл сходится.

1982. $\int\limits_0^{\infty} f(x)\cos ax\,dx>0$, если $f(x)$ — убывающая и интеграл сходится.

1983. Доказать, что при $h \to 0$ справедливо равенство:

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-\frac{(t-x)^2}{h^2}}\, dt = f(x),$$

если $f(x)$ — непрерывная функция, для которой $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, e^{-\frac{t^2}{h^2}}\, dt$ имеет смысл при достаточно малых $|h|$.

1984. Доказать теорему Лапласа: если $f(x)$ в интервале (a, b) имеет конечную производную, а $\varphi(x) > 0$ и достигает наибольшего значения при $x = c$, где $a < c < b$, то при $n \to \infty$ справедливо равенство:

$$\int_a^b f(x)\,[\varphi(x)]^n\, dx = f(c)\,[\varphi(c)]^n \sqrt{-\frac{2\pi\varphi(c)}{n\varphi''(c)}}\left[1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right],$$

где $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ по абсолютной величине не больше, чем $\frac{1}{\sqrt{n}}$, умноженное на некоторую постоянную. Если c совпадает с одним из чисел a или b, то в правой части надо поставить добавочный множитель, равный $\frac{1}{2}$.

Доказать равенства:

1985. $\int\limits_0^1 (1 - x^2)^n\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right)$.

1986. $\int\limits_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1}\, dx = n^n e^{-n} \sqrt{\frac{2\pi}{n}}\left[1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right]$.

1987. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2n} x}{1 + x}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right)$.

1988. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n} x}{1 + x}\, dx = \frac{1}{\pi + 2}\sqrt{\frac{\pi}{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Доказать неравенства:

1989. $\left(\int\limits_a^b \varphi(x)\,\psi(x)\, dx\right)^2 \leqslant \int\limits_a^b \varphi^2(x)\, dx \int\limits_a^b \psi^2(x)\, dx$

(Буняковский).

1990. $$\varphi\left[\frac{\int\limits_a^b p(x) f(x)\,dx}{\int\limits_a^b p(x)\,dx}\right] \leqslant \frac{\int\limits_a^b p(x)\,\varphi[f(x)]\,dx}{\int\limits_a^b p(x)\,dx},$$

где $p(x) \geqslant 0$, а кривая $y = \varphi(x)$ выпукла вниз.

1991. Получить аналогичное неравенство, для случая, когда кривая $y = \varphi(x)$ выпукла вверх.

1992. Доказать, что функция от t, равная величине

$$\left[\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b [f(x)]^t\,dx\right]^{\frac{1}{t}}, \quad (a < b),$$

не убывает с возрастанием t, если $f(x)$ имеет положительную нижнюю границу.

1993. Моментами функции $f(x)$ в интервале (a, b) называются интегралы

$$M_n = \int\limits_a^b f(x)\,x^n\,dx.$$

Доказать, что если $0 < a < b$ и $f(x) > 0$ при $x > 0$, то ряд $\sum \frac{t^n}{M_n}$ имеет конечный или бесконечный радиус сходимости, смотря по тому, конечен или бесконечен интервал (a, b).

1994. Разбивая интервал $(-\infty, \infty)$ на части: $(-\infty, x-h)$, $(x-h, x)$, $(x, x+h)$, $(x+h, \infty)$, где h — произвольно выбранное число, доказать равенство:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u)\,\frac{\sin n(u-x)}{u-x}\,du = f(x).$$

При этом для простоты предполагается, что $f(x)$ всюду непрерывна, $f'(x)$ всюду существует и в каждом данном интервале ограничена, а $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u)\,du$ абсолютно сходится.

1995. При тех же условиях, что и в предыдущей задаче, относительно $f(x)$ доказать формулу Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} du \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos u(v-x)\,dv.$$

1996. Показать, что интеграл Фурье (см. предыдущую задачу) остается в силе и в том случае, когда $f(x)$ в отдельных точках имеет конечные разрывы, при сохранении в остальных точках прежних условий. При этом в точках разрыва значение интеграла равно $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$, где $f(x+0)$ и $f(x-0)$ — пределы справа и слева величины $f(\xi)$ при $\xi \to x$.

1997. Доказать, что для функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих условиям предыдущей задачи, справедлива теорема:

если $\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\,e^{ixt}\,dt,$ то $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(t)\,e^{-ixt}\,dt.$

1998. Доказать для функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, введенных в предыдущей задаче, равенство:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\varphi(x)|^2\,dx=\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\psi(x)|^2\,dx.$$

1999. Запись $\varphi(x)\sim\frac{a_0}{x^\sigma}+\frac{a_1}{x^{\sigma+1}}+\frac{a_2}{x^{\sigma+2}}+\ldots$ читается: функции $\varphi(x)$ соответствует асимптотический ряд, стоящий в правой части; эта запись означает, что при $x\to\infty$ при любом ν

$$x^{\sigma+\nu}\left[\varphi(x)-\frac{a_0}{x^\sigma}-\frac{a_1}{x^{\sigma+1}}-\ldots-\frac{a_\nu}{x^{\sigma+\nu}}\right]\to 0.$$

Доказать, что

$$\int\limits_0^{\infty}e^{-xt}f(t)\,dt\sim\frac{a_0}{x}+\frac{a_1\cdot 1!}{x^2}+\frac{a_2\cdot 2!}{x^3}+\frac{a_3\cdot 3!}{x^4}+\ldots,$$

если $f(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+\ldots$ и интеграл сходится.

2000. Доказать, что при $n\to\infty$

$$\int\limits_0^1 x^{n-1}\frac{dx}{\sqrt{1-x}}\sim\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}}+\frac{a_1\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{n\sqrt{n}}+\frac{a_2\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{n^2\sqrt{n}}+\ldots,$$

если $\frac{1}{\sqrt{1-e^{-t}}}=\frac{1}{\sqrt{t}}+a_1\sqrt{t}+a_2t\sqrt{t}+\ldots$

2001. Пользуясь равенствами:

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin u\,du}{u+m}=\int\limits_0^{\infty}\frac{e^{-mu}\,du}{1+u^2},\quad \int\limits_0^{\infty}\frac{\cos u\,du}{u+m}=\int\limits_0^{\infty}\frac{ue^{-mu}\,du}{1+u^2},$$

доказать формулу:

$$\int_m^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx =$$

$$= \frac{\cos m}{m}\left[1 - \frac{2!}{m^2} + \frac{4!}{m^4} - \ldots + (-1)^{\nu-1}\frac{(2\nu-2)!}{m^{2\nu-2}} + \theta(-1)^\nu \frac{(2\nu)!}{m^{2\nu}}\right] +$$

$$+ \frac{\sin m}{m^2}\left[1 - \frac{3!}{m^2} + \frac{5!}{m^4} - \ldots + (-1)^{\nu-1}\frac{(2\nu-1)!}{m^{2\nu-2}} + \theta_1(-1)^\nu \frac{(2\nu+1)!}{m^{2\nu}}\right],$$

где θ и θ_1 — некоторые положительные правильные дроби.

Найти величины следующих интегралов:

2002. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x^4+1)^2}$.

2003. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$.

2004. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x^4-x^2+1)^2}$.

2005. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,dx}{e^{x-a}+e^{a-x}}$.

2006. $\displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{dx}{1+\varphi(x)+\sqrt{1+\varphi^2(x)}}$, где $\varphi(x)$ — нечетная функция.

2007. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}\sin x}{\sin x}\,dx$.

2008. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-a^2x^2+2abx}\,dx$.

2009. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\alpha x}{(x-a)^2+b^2}\,dx$.

2010. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{(x-a)^2+b^2}\,dx$.

2011. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x\cos\beta x}{1+x^2}\,dx$.

2012. $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x^2}\sin ax\,dx$.

2013. $\displaystyle\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x^2-y^2+2xy\cos\alpha}\,dx\,dy$.

2014. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{(1+x)^4}\,dx$.

2015. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{(x^2-a^2)+b^2x^2}$.

2016. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln(1+x)}{x^\lambda}\,dx$.

2017. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \left(1+\frac{x^2}{n-1}\right)^{-\frac{n+1}{2}}dx$.

2018. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x)^2x^2(x-a)^2}}$.

2019. $\int\limits_0^1 \frac{x^a - x^b}{\ln x}\,dx.$

2020. $\int\limits_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x}\,dx;\ a > 0,\ b > 0.$

2021. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin ax \sin bx}{x}\,dx;\ a > 0,\ b > 0.$

2022. $\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} ax - \operatorname{arctg} bx}{x}\,dx;\ a > 0,\ b > 0.$

2023. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin ax - a \sin x}{x^2}\,dx;\ a \geqslant 0.$

2024. $\int\limits_0^\infty \frac{ax \cos x - \sin ax}{x^2}\,dx;\ a \geqslant 0.$

2025. $\int\limits_0^\infty \frac{1 - \cos ax}{x^2}\,dx.$

2026. $\int\limits_0^\infty \frac{\cos ax}{(1 + x^2)^2}\,dx.$

2027. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x^2 + a^2}\,dx.$

2028. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^4 ax}{x^4}\,dx.$

2029. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin ax \sin bx}{x^2}\,dx;\ a \geqslant b > 0.$

2030. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^2 x \cos ax}{x^2}\,dx;\ a > 0.$

2031. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^3 x \cos ax}{x}\,dx;\ a > 0.$

2032. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin ax \sin^2 x}{x^3}\,dx.$

2033. $\int\limits_0^\infty \frac{x - \sin x}{x^3}\,dx.$

2034. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x - x \cos x}{x^3}\,dx.$

2035. $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{\cos mx}{e^x + e^{-x}}\,dx.$

2036. $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\frac{x\sin 2x-\sin^2 x}{x^2}\,dx.$ **2037.** $\int\limits_0^\infty \frac{x^{n-1}\ln x}{(x^2+a^2)^n}\,dx.$

2038. $\int\limits_0^\infty \frac{x\sin ax}{(1+x^2)^2}\,dx.$ **2039.** $\int\limits_0^\infty \frac{x^2-a^2}{x^2+a^2}\,\frac{\sin x}{x}\,dx.$

2040. v. p. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a-b\cos x},\quad 0<a<b.$

2041. v. p. $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{1-x^3}.$ **2042.** $\int\limits_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx.$

2043. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{x\,dx}{1-a\cos x},$ при $|a|<1.$

2044. v. p. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{x\,dx}{1-a\cos x},$ при $a>1.$

2045. $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{\sqrt{\operatorname{sh} 2x}}.$ **2046.** $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-ax}}{\sqrt{\operatorname{sh} 2x}}\,dx.$

2047. $\int\limits_0^\pi \frac{dx}{1-2\sin 2\alpha\cos x+\cos^2 x};\quad -\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{4}.$

2048. $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-x}(1-\cos ax)}{x}\,dx.$

2049. $\int\limits_0^\infty J_0(x)\,e^{-bx}\,dx,$ где $J_0(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x\cos\varphi)\,d\varphi.$

2050. Доказать, что $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin px}{\sin x}\cos^{p-1}x\,dx=\frac{\pi}{2}$ при $p>0$ (Лиувилль).

2051. Доказать тождество Рамануджана:

$$\sqrt{\alpha}\int\limits_0^\infty \frac{e^{-x^2}\,dx}{\operatorname{ch}\alpha x}=\sqrt{\beta}\int\limits_0^\infty \frac{e^{-x^2}\,dx}{\operatorname{ch}\beta x};\quad \alpha\beta=\pi.$$

2052. Доказать, что при $n \to \infty$ абсолютная величина интеграла

$$\int_0^n x\left(1-\frac{x^2}{1}\right)\left(1-\frac{x^2}{4}\right)\ldots\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)dx \to \infty.$$

2053. Доказать равенство:

$$\int_0^\infty f\left(x+\frac{a}{x}\right)dx = \int_0^\infty f(\sqrt{x^2+4a})\,dx, \quad a>0,$$

предполагая, что оба интеграла имеют смысл.

2054. Пользуясь интегралами Френеля и предыдущим результатом, доказать равенство:

$$\int_0^\infty \cos\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}(\cos 2a - \sin 2a).$$

2055. С помощью подстановки $\frac{x-a}{b-x} = \frac{\alpha}{\beta}\frac{e^t}{e^{-t}}$ доказать равенство:

$$\int_a^b [(x-a)(b-x)]^{-\frac{3}{2}} e^{-\left(\frac{\alpha^2}{x-a}+\frac{\beta^2}{b-x}\right)}dx =$$

$$= \sqrt{\pi}\,\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}(b-a)^{-\frac{3}{2}}\; e^{-\frac{(\alpha+\beta)^2}{b-a}}.$$

2056. Пользуясь тождеством

$$4\cos^2 x = (1+e^{2xi})(1+e^{-2xi}),$$

доказать равенства при $0 < x < \frac{\pi}{2}$

$$\int_0^x \ln\cos x\,dx = -x\ln 2 - \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{\nu^2}\sin 2\nu x,$$

$$\int_0^x \ln\sin x\,dx = -x\ln 2 - \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2}\sin 2\nu x$$

(Н. И. Лобачевский).

2057. Разлагая по степеням a, где $|a|<1$, доказать равенство:

$$\int_0^\pi \frac{\sin^n x\,dx}{(1+a\cos x)^{n+1}} = \frac{2^n\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{(1-a^2)^{\frac{n+1}{2}}}$$

(Н. И. Лобачевский).

Проверить равенства:

2058. $\int\limits_0^\infty \frac{(e^x - e^{-x})\,x\,dx}{e^{2x}+e^{-2x}+2\cos 2\alpha} = \frac{\pi\alpha}{4\sin\alpha}; \quad 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$

(Н. И. Лобачевский).

2059. $\int\limits_0^\infty \frac{(e^x - e^{-x})\,x\,dx}{e^{2x}+e^{-2x}+2\cos 2\alpha} = \frac{\pi(\pi-\alpha)}{4\sin\alpha}; \quad \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$

(М. В. Остроградский).

2060. $\int\limits_0^\infty e^{-\sqrt{n^2+x^2}}\cos\alpha x\,dx = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\int\limits_0^\infty e^{-\sqrt{1+\alpha^2}\sqrt{n^2+x^2}}\,dx;$

$\alpha^2<1$

(Н. И. Лобачевский).

§ 9. Ряды Фурье и близкие вопросы

Разложить в простейший ряд Фурье функцию $f(x)$, определенную в интервале $(-\pi, \pi)$ следующими условиями:

2061. $f(x)=\frac{\pi}{4}$ при $0<x<\pi$; $f(x)=-\frac{\pi}{4}$ при $-\pi<x<0$.

2062. $f(x)=0$ при $-\pi<x<0$; $f(x)=1$ при $0<x<\pi$.

2063. $f(x)=|x|$ при $-\pi<x<\pi$.

2064. $f(x)=x$ при $-\pi<x<\pi$.

2065. $f(x)=\sin\frac{1}{2}x$ при $0<x<\pi$; $f(x)=1+\cos\frac{1}{2}x$ при $\pi<x<2\pi$.

2066. $f(x)=\frac{\pi-x}{2}$ при $0<x<\pi$; $f(x)=-\frac{\pi+x}{2}$ при $-\pi<x<0$.

2067. $f(x)=x^2$ при $-\pi<x<\pi$.

2068. $f(x)=\cos x$ при $0<x<\pi$; $f(x)=-\cos x$ при $-\pi<x<0$.

2069. $f(x)=|\sin x|$ при $-\pi<x<\pi$.

2070. $f(x)=\cos ax$ при $-\pi<x<\pi$, a — не целое.

2071. $f(x)=\sin ax$ при $-\pi<x<\pi$, a — не целое.

2072. $f(x)=0$ при $-\pi<x<0$; $f(x)=\sin^2 x$ при $0<x<\pi$.

Разложить в ряд Фурье периодическую функцию:

2073. $f(x)=\{x\}$ — дробная доля числа x, т. е. разность $x-[x]$, где $[x]$ — целая часть x.

2074. $f(x)=(x)$ — расстояние x до ближайшего целого числа.

2075. $f(x)=x$, 1 или $3-x$, смотря по тому, в каком из интервалов (0,1), (1,2) или (2,3) лежит x, предполагая при этом, что период $f(x)$ равен 3.

Если функция не задана периодической и ищется разложение, верное лишь в заданном промежутке, то ее можно разлагать в ряд Фурье с периодом, равным длине данного промежутка или с любым большим, но в последнем случае функцию надо доопределить любым образом (лишь бы соблюдались условия Дирихле). Этим можно пользоваться для получения разложения по одним косинусам или по одним синусам или ограничиться только синусами или косинусами углов нечетной кратности.

В дальнейших задачах будет предполагаться, что период надо выбирать наименьшим, при котором удовлетворяются требования задачи.

2076. В интервале $(-h, h)$ разложить функцию e^x.

2077. Разложить $\operatorname{ch} ax$ в интервале $(-\pi, \pi)$.

2078. Разложить $\operatorname{sh} ax$ в интервале $(-\pi, \pi)$.

2079. В интервале $(0, \pi)$ разложить x^3 по косинусам.

2080. В интервале $(0, \pi)$ разложить x^3 по синусам.

2081. В интервале $(0, \pi)$ разложить $\sin x$ по косинусам.

Функция $f(x)=x^2(a-x)$ задана в интервале $(0; a)$.

2082. Разложить ее в ряд Фурье с периодом a.

2083. Разложить ее в ряд Фурье как четную функцию.

2084. Разложить ее в ряд Фурье как нечетную функцию.

Функция $f(x)=x$ задана в интервале $(0; a)$.

2085. Разложить ее в ряд Фурье с периодом a.

2086. Разложить ее в ряд Фурье как четную функцию.

2087. Разложить ее в ряд Фурье как нечетную функцию.

2088. Разложить ее в ряд Фурье как нечетную, по синусам углов нечетной кратности.

Функции, рациональные относительно $\cos x$ и $\sin x$, могут разлагаться в ряд Фурье без формул Фурье. Для этого пишем: $\cos x=\frac{t^2+1}{2t}$, $\sin x=\frac{t^2-1}{2ti}$, где $t=e^{xi}$. После этого дело сводится к разложению функции по положительным и отрицательным степеням t. Перейдя обратно от t к x, получим искомое разложение в ряд Фурье.

Изложенным способом и подобными ему получить следующие разложения:

2089. $\frac{1-a^2}{1-2a\cos x+a^2}=1+2\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos nx; \ |a|<1.$

2090. $\frac{1-a\cos x}{1-2a\cos x+a^2}=\sum_{0}^{\infty} a^n \cos nx; \ |a|<1.$

2091. $\dfrac{a\sin x}{1-2a\cos x+a^2}=\sum\limits_{0}^{\infty} a^n \sin nx;\quad |a|<1.$

2092. $\ln(1-2a\cos x+a^2)=-2\sum \dfrac{a^n}{n}\cos nx;\quad |a|<1.$

2093. $\ln\left|2\sin\dfrac{x}{2}\right|=\cos x+\dfrac{\cos 2x}{2}+\dfrac{\cos 3x}{3}+\ldots$

2094. Функция $f(x)$, данная в интервале $\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$, продолжена в интервал $\left(\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right)$, при этом $f\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=-f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$; доказать, что при $0<x<\pi$ имеется равенство:

$$f(x)=\sum a_n \cos(2n+1)x,$$

причем

$$a_n=\frac{4}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos(2n+1)x\,dx.$$

2095. Как продолжить в интервал $\left(\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right)$ функцию $f(x)$, данную в интервале $\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$, так, чтобы при $0<x<\pi$

$$f(x)=\sum b_n \sin(2n+1)x$$

и как можно вычислять коэффициенты?

Доказать при $0<x<\pi$ следующие равенства:

2096. $\dfrac{\cos 2x}{1\cdot 3}+\dfrac{\cos 4x}{3\cdot 5}+\dfrac{\cos 6x}{5\cdot 7}+\ldots=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\pi}{4}\sin x.$

2097. $\dfrac{\sin x}{1^3}+\dfrac{\sin 3x}{3^3}+\dfrac{\sin 5x}{5^3}+\ldots=\dfrac{\pi x}{8}(\pi-x).$

2098. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2n+2)\theta}{n(n+1)}=\sin 2\theta-(\pi-2\theta)\sin^2\theta-$
$-\sin\theta\cos\theta\ln 4\sin^2\theta.$

2099. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2n+1)\theta}{n^2(n+1)^2}=2(\pi-2\theta)\sin\theta+$
$+\left(\dfrac{\pi^2}{3}-2\pi\theta+2\theta^2-3\right)\cos\theta.$

2100. Доказать правильность разложения:

$$\frac{\cos 3x}{1\cdot 3\cdot 5}-\frac{\cos 5x}{3\cdot 5\cdot 7}+\frac{\cos 7x}{5\cdot 7\cdot 9}-\ldots=\frac{\pi}{8}\cos^2 x-\frac{1}{3}\cos x$$

в промежутке $0<x<\frac{\pi}{2}$.

Доказать равенства:

2101. $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi a(n+x)^2}=\frac{1}{\sqrt{a}}\sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{a}}\cos 2\pi nx, \qquad a>0.$$

2102. $$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x}=\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{x}}\right); \qquad x>0.$$

2103. $$\lim_{x\to 1-0}\sqrt{1-x}\,(x+x^4+x^9+\ldots)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

2104. $$\lim_{x\to 1-0}(x-x^4+x^9-x^{16}+\ldots)=\frac{1}{2}.$$

2105. $$\sum_{n=a}^{b} f(n)=\frac{f(a)+f(b)}{2}+\int_a^b f(x)\,dx+$$

$$+2\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f(x)\cos 2\pi nx\,dx$$

(формула Пуассона).

2106. Модулем непрерывности $\omega(h)$ называется точная высшая граница колебания функции $f(x)$ в интервалах длиной h, т. е. чисел $|f(x_2)-f(x_1)|$, где $|x_2-x_1|<h$. Доказать, что для непрерывной функции $f(x)$ интегралы

$$\int_a^b f(x)\cos nx\,dx \quad \text{и} \quad \int_a^b f(x)\sin nx\,dx$$

по абсолютному значению не больше, чем $C\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)$, где C — соответствующая постоянная.

2107. Доказать равенство:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{|\sin mx|}{\sin x}\,dx=\frac{2}{\pi}\ln m+O(1),$$

где $O(1)$ при $m\to\infty$ — ограниченная величина.

2108. Доказать неравенство Лебега:

$$\left|\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{m}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\right|<CM\ln m.$$

Здесь a_n и b_n — коэффициенты Фурье для функции $f(x)$, а M — верхняя граница $|f(x)|$.

2109. Доказать, что при $0<x<\pi$ существует равенство:

$$\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\sin\nu x}{\nu}=-\frac{x}{2}+\int_0^{\frac{x}{2}}\frac{\sin(2n+1)t}{t}\,dt+\int_0^{\frac{x}{2}}\left(\frac{1}{\sin t}-\frac{1}{t}\right)\sin(2n+1)t\,dt.$$

2110. Доказать, что при любом вещественном x и целом $n>0$ имеется равенство:

$$\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\sin\nu x}{\nu}=2\pi\theta;\quad |\theta|<1.$$

2111. При $0<x<\pi$ доказать равенство:

$$\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\sin(2\nu-1)x}{2\nu-1}=\frac{1}{2}\int_0^{x}\frac{\sin 2nt}{t}\,dt+\frac{1}{2}\int_0^{x}\left(\frac{1}{\sin t}-\frac{1}{t}\right)\sin 2\,nt\,dt.$$

2112. При любом вещественном x и целом $n>0$ доказать равенство:

$$\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\sin(2\nu-1)x}{2\nu-1}=\frac{3}{2}\theta;\quad |\theta|<1.$$

2113. Доказать неравенство Фейера:

$$\left|\frac{\cos x}{n}+\frac{\cos 2x}{n-1}+\ldots+\frac{\cos nx}{1}-\right.$$
$$\left.-\frac{\cos(n+1)x}{1}-\frac{\cos(n+2)x}{2}-\ldots-\frac{\cos 2nx}{n}\right|<10.$$

2114. Суммой Фейера σ_n называется арифметическое среднее первых n сумм Фурье функции $f(x)$:

$$n\sigma_n=s_0+s_1+\ldots+s_{n-1},$$

где

$$\text{при } m\geqslant 1\quad s_m=\frac{a_0}{2}+\sum_{\nu=1}^{m}(a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x);\quad s_0=\frac{a_0}{2},$$

a_ν, b_ν, — коэффициенты Фурье для функции $f(x)$. Доказать, что $|\sigma_n(x)| < M$, если $|f(x)| < M$ во всем периоде.

2115. Доказать, что если $f(x)$ непрерывная функция на интервале $[-\pi, \pi]$, $l \leqslant f(x) \leqslant L$ и при любом m, $|ma_m| < A$, $|mb_m| < B$, то

$$l-(A+B) \leqslant s_n(x) \leqslant L+(A+B);$$

a_m, b_m — коэффициенты Фурье, $s_n(x)$ — n-я частичная сумма ряда Фурье функции $f(x)$.

2116. Доказать, что для всякой непрерывной функции $\sigma_n(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$.

2117. Доказать, что для периодической функции $f(x)$, удовлетворяющей условию Коши-Липшица

$$|f(x_2)-f(x_1)| < C|x_2-x_1|,$$

существует неравенство $|\sigma_n - f(x)| < \frac{A \ln n}{n}$, где A постоянная.

Считая $f(x)$ там, где она встречается, непрерывной функцией с периодом 2π, доказать следующие формулы и утверждения:

2118. Интеграл $\frac{2}{\pi} \cdot \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+u) \cos^{2n} \frac{u}{2}\, du$ есть тригонометрический полином, который стремится к $f(x)$, если $n \to \infty$.

2119. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} F_m(u)\,du > \frac{\pi}{3m} - \frac{1}{11m^2}$; $\quad 2\pi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} uF_m(u)\,du < \frac{c}{m^2}$,

где $F_m(u) = \left(\frac{\sin mu}{m \sin u}\right)^4$, а c — некоторая постоянная.

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} F_m(u)\,du = \frac{\pi}{3m} + \frac{\pi}{6m^3} = \frac{1}{2A_m}.$$

2120. Величина $T_m(x)$, где

$$T_m(x) = A_m \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x+2u) F_m(u)\,du,$$

есть тригонометрический полином порядка $2m-2$.

2121. $$f(x)-T_m(x)=A_m\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[f(x)-f(x+2u)]\,F_m(u)\,du.$$

Значение A_m см. зад. № 2119.

2122. Если $f(x)$ удовлетворяет условию

$$|f(x_2)-f(x_1)|<C\,|x_2-x_1|,$$

то справедливо неравенство Джексона:

$$|f(x)-T_m(x)|<\frac{M}{m},$$

где M — соответствующая постоянная.

2123. Пусть $f(x)$ — функция, интегрируемая в интервале $(0,2\pi)$, a_n и b_n — ее коэффициенты Фурье, $S_m=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{m}(a_n\cos nx+ b_n\sin nx)$ — ее сумма Фурье, а $P_m(x)$ — любой тригонометрический полином порядка m, отличный от $S_m(x)$. Доказать неравенство:

$$\int\limits_0^{2\pi}[f(x)-S_m(x)]^2\,dx<\int\limits_0^{2\pi}[f(x)-P_m(x)]^2\,dx.$$

2124. Доказать неравенство Бесселя:

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu^2+b_\nu^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}|f(x)|^2\,dx.$$

2125. Исходя из неравенства Бесселя и неравенства $2ab\leqslant a^2+b^2$, доказать сходимость рядов $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu^2+b_\nu^2)$ и $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{|a_\nu|+|b_\nu|}{\nu^\alpha}$, где $\alpha>\frac{1}{2}$.

2126. Доказать неравенство:

$$\int\limits_a^b|f(x)-\varphi(x)|^2\,dx<2\int\limits_a^b|f(x)-\psi(x)|^2\,dx+2\int\limits_a^b|\psi(x)-\varphi(x)|^2\,dx.$$

2127. Пусть $f(x)$ — интегрируемая в $(0,\ 2\pi)$ функция, ε — произвольная положительная постоянная, $\varphi(x)$ — такая непрерывная функция, что $\int\limits_0^{2\pi}|f(x)-\varphi(x)|^2\,dx<\varepsilon$, а $\sigma_n(x)$ — сумма Фейера для $\varphi(x)$, отличающаяся от $\varphi(x)$ меньше, чем на $\sqrt{\frac{\varepsilon}{2\pi}}$. Доказать неравенство:

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - \sigma_n(x)|^2 \, dx < 4\varepsilon.$$

2128. Пользуясь предыдущими результатами, доказать теорему А. М. Ляпунова (теорема замкнутости):

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu^2 + b_\nu^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2(x) \, dx,$$

справедливую для любой интегрируемой функции $f(x)$.

2129. Доказать равенство:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x) \psi(x) \, dx = \frac{a_0 \alpha_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \alpha_\nu + b_\nu \beta_\nu),$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ интегрируемы в интервале $(0, 2\pi)$, а a_ν, b_ν, α_ν, β_ν — коэффициенты Фурье этих функций.

2130. Доказать теорему В. А. Стеклова:

$$\frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(u) \, du = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x) \frac{\sin \nu h}{\nu h}.$$

2131. Доказать неравенства В. А. Стеклова:

1) $$\int_0^{2\pi} |f'(x)^2| \, dx \geqslant \int_0^{2\pi} f^2(x) \, dx, \quad \text{если} \quad \int_0^{2\pi} f(x) \, dx = 0,$$

2) $$\int_0^{\pi} |f'(x)|^2 \, dx \geqslant \int_0^{\pi} f^2(x) \, dx; \quad f(0) = f(\pi) = 0.$$

2132. Доказать равенство:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [f(x) - \sigma_n(x)]^2 \, dx = \frac{1}{n^2} \sum_{\nu=1}^{n-1} \nu^2 (a_\nu^2 + b_\nu^2) + \sum_{\nu=n}^{\infty} (a_\nu^2 + b_\nu^2),$$

где $\sigma_n(x)$ — сумма Фейера функции $f(x)$.

2133. Доказать, что для функции $f(x)$, удовлетворяющей условию Коши — Липшица

$$|f(x_2) - f(x_1)| < A \cdot |x_2 - x_1|^\alpha,$$

справедливо неравенство:

$$\sum_{\nu=n}^{2n}\left(a_\nu^2+b_\nu^2\right)<\frac{k}{n^{2\alpha}},$$

где k — соответствующая постоянная.

2134. Доказать теорему С. Н. Бернштейна: ряд Фурье для функции, удовлетворяющей условию Коши — Липшица при $\alpha>\frac{1}{2}$, сходится абсолютно.

2135. Параметрическому уравнению замкнутой кривой можно придать вид:

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt);\quad y=\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos nt+\beta_n\sin nt).$$

Пользуясь формулами: $ds^2=dx^2+dy^2$ и $A=\frac{1}{2}\int\limits_S x\,dy-y\,dx$, где A — площадь, ограниченная замкнутой кривой S, доказать неравенство $4\pi A\leqslant L^2$ (L есть длина кривой S), выражающее, что из всех замкнутых кривых с длиной L наибольшую площадь имеет окружность (доказательство Гурвица).

Полиномы Чебышева: $T_n(x)=\frac{1}{2^{n-1}}\cos(n\arccos x)$, Лежандра: $P_n(x)=$ $=\frac{1}{2^n\cdot n!}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$, Эрмита — Чебышева: $H_n(x)=\frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{n!}\frac{d^ne^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^n}$ и полиномы Абеля — Лагерра: $L_n(x)=\frac{e^x}{n!}\frac{d^nx^ne^{-x}}{dx^n}$ обладают свойством ортогональности, в силу которого при $n\neq m$ имеются равенства:

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_n(x)\,T_m(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=0;\qquad \int_{-1}^{1}P_n(x)\,P_m(x)\,dx=0;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}H_n(x)\,H_m(x)\,dx=0;\quad \int_{0}^{\infty}e^{-x}L_n(x)\,L_m(x)\,dx=0.$$

При $n=m$ правые части этих равенств заменяются соответственно величинами:

$$\frac{\pi}{2^{2n-1}};\quad \frac{2}{2n+1};\quad \frac{\sqrt{2\pi}}{n!};\quad 1.$$

Надо заметить, что в литературе под полиномами Эрмита — Чебышева понимаются несколько отличающихся друг от друга выражений. Иногда за вес берется $e^{-\frac{x^2}{2}}$, иногда e^{-x^2}, иногда вводится множитель $(-1)^n$ или $\frac{1}{n!}$, иногда нет, руководствуясь удобством применения в рассматриваемых задачах. В первой части под полиномом Эрмита понимался $H_n^{(x)}=e^{x^2}\frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}$ в настоящей $H_n^{(x)}=\frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{n!}\frac{d^n e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^n}$.

Разложить по полиномам Чебышева $T_n(x)$ функции, определенные в интервале $(-1, 1)$ условиями:

2136. $f(x)=x^3$.
2137. $f(x)=0$ при $-1<x<0$; $f(x)=1$ при $0<x<1$.
2138. $f(x)=|x|$.
2139. $f(x)=x^{2n}$.

Разложить при $-1<x<1$ по полиномам Лежандра функции, определенные условиями:

2140. $f(x)=0$ при $-1<x<0$; $f(x)=1$ при $0<x<1$.
2141. $f(x)=|x|$.

Разложить по полиномам Лагерра $L_n(x)$ при $x>0$ следующие функции:

2142. e^{-ax}. **2143.** x^n. **2144.** $\sin ax$. **2145.** $\cos ax$.

Разложить по полиномам Чебышева — Эрмита при $-\infty<x<\infty$ следующие функции:

2146. $\operatorname{Sign} x$, равную -1 при $x<0$ и $+1$ при $x>0$.
2147. $|x|$. **2148.** e^{-ax}. **2149.** $\cos ax$. **2150.** $\sin ax$.

Представить интегралом Фурье следующие функции:

2151. $f(x)=\begin{cases} e^{-mx}, & x>0; \\ e^{mx}, & x<0; \quad m>0. \end{cases}$

2152. $f(x)=\begin{cases} e^{-mx}, & x>0; \\ -e^{mx}, & x<0; \quad m>0. \end{cases}$

2153. $f(x)=\begin{cases} e^{-mx}, & x>0; \\ 0, & x<0; \quad m>0. \end{cases}$

2154. $f(x)=\begin{cases} 1, & |x|<\tau; \\ 0, & |x|>\tau. \end{cases}$

2155. $f(x)=\begin{cases} 1, & 0<x<\tau; \\ -1, & -\tau<x<0; \\ 0, & |x|>\tau. \end{cases}$

2156. $f(x)=\begin{cases} A\left(1-\frac{|x|}{a}\right), & |x-x_0|<a; \\ 0, & |x-x_0|>a. \end{cases}$

2157. $f(x)=\begin{cases} e^{-kx}\sin\omega x, & x>0; \\ 0\quad, & x<0;\ k>0. \end{cases}$

2158. $f(x)=\begin{cases} \sin x, & 0<x<n\pi;\ n\text{ — целое}, \\ 0, & x<0;\ x>n\pi. \end{cases}$

ОТДЕЛ ДВЕНАДЦАТЫЙ

ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

§ 1. Комплексная плоскость. Элементарные функции

В дальнейшем обычно будут приняты такие обозначения: $z = x + iy = re^{i\varphi}$ независимое переменное; $x = \operatorname{Re} z$; $y = \operatorname{Im} z$; $r = |z| =$ модуль z, $\varphi = \operatorname{Arg} z$. Величина, сопряженная с z, будет обозначаться

$$\bar{z} = x - iy = re^{-i\varphi}.$$

Подобным образом: $w = u + iv$; $\zeta = \xi + i\eta$.

Какие кривые описываются точкой z плоскости комплексного переменного, если переменная z выражена через вещественную переменную t, меняющуюся от $-\infty$ до ∞? Коэффициенты a, b и ω — вещественные.

2159. $z = e^{(a+bi)t}$.

2160. $z = at + be^{i\omega t}$.

2161. $z = ae^{it} + a^{-1}e^{-it}$.

2162. $z = a(1 + e^{it})^{-2}$.

2163. $z = (a + it)e^{-it}$.

Какие линии или области в плоскости переменного z определяются следующими условиями?

2164. $|z-2| < |z|$.

2165. $|z-1| \geqslant 2|z-i|$.

2166. $|z^2-1| \leqslant 1$.

2167. $\operatorname{Im} z^{-1} = 2$.

2168. $0 \leqslant \operatorname{arc} \dfrac{z-i}{z+i} \leqslant \dfrac{\pi}{4}$.

Вычислить значения следующих элементарных функций при комплексном значении аргумента:

2169. $e^{\ln 7 + \pi i}$.

2170. e^{2+3i}.

2171. $\sin(-1+2i)$.

2172. 2^{2i}.

2173. $(-10)^{\frac{1}{2}i}$.

2174. $\operatorname{tg}(2-i)$.

2175. $\ln(-2+i)$.

2176. Проверить, что:

1) какое бы вещественное или комплексное число w ни было задано, можно найти z из уравнения $\sin z = w$;

2) этих значений z, называемых как и в вещественной области $\arcsin w$, существует бесчисленное множество и их общий вид $\operatorname{Arcsin} w = \pi n + (-1)^n \arcsin w$, если $\arcsin w$ — одно из найденных значений.

2177. Подобно тому, как в предыдущей задаче,
1) $\arccos w$ — всегда существует;
2) $\operatorname{Arccos} w = 2\pi n \pm \arccos w$.

2178. Уравнение $\operatorname{tg} z = w$:
1) имеет бесчисленное множество решений, если только $w \neq \pm i$;
2) $\operatorname{Arctg} w = \pi n + \operatorname{arctg} w$. Доказать.

Найти z из уравнений:

2179. $\cos z = -10$. **2180.** $\sin z = 2$. **2181.** $\operatorname{tg} z = 2i$.

Показать, что следующие функции $w = f(z)$ отображают данные области плоскости $z = x + iy$ в указанные области плоскости $w = u + iv$.

2182. $w = z^2$ — первый квадрант плоскости z в верхнюю полуплоскость w.

2183. $w = e^z$ — полосу $0 < y < \frac{\pi}{2}$ в первый квадрант плоскости w.

2184. $w = \ln z$ — область $x^2 + y^2 \geqslant 1; y > 0$ в полуполосу $u > 0$, $0 < v < \pi$.

2185. $w = \sin z$ — полуполосу $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$; $y > 0$ в полуплоскость $v > 0$.

2186. $w = \frac{1}{z+i}$ — полуплоскость $y \geqslant 0$ в круг $u^2 + v^2 + v \leqslant 0$.

2187. $w = \frac{i-z}{i+z}$ — первый квадрант z в верхний полукруг $|w| < 1$.

На каких линиях плоскости z функция:

2188. e^z а) вещественна? б) число чисто мнимое?
2189. $\sin z$ а) вещественна? б) число чисто мнимое?
2190. $\cos z$ а) вещественна? б) число чисто мнимое?

Найти на плоскости z линии, на которых:

2191. $\left|\frac{az+b}{cz+d}\right| = \text{const}$.

2192. $\arg \frac{az+b}{cz+d} = \text{const}$.

a, b, c, d — комплексные постоянные.

2193. Найти на плоскости z линии $|\sin z| = c = \text{const}$, изучить их вид при $c < 1$, $c = 1$, $c > 1$.

2194. Найти на плоскости w линии $\operatorname{Re} z = \text{const}$; $\operatorname{Im} z = \text{const}$, если $w = \operatorname{tg} z$.

2195. Найти на плоскости z линии $|w| = \text{const}$; $\arg w = \text{const}$, если $w = e^{\frac{1}{z}}$.

2196. Найти на плоскости линии $|w| = \text{const}$; $\arg w = \text{const}$, если $w = z + \sqrt{z^2 - 1}$.

2197. Найти на плоскости z линии $\operatorname{Re} \ln \left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right) = \text{const}$.

2198. Найти $\operatorname{Re} \operatorname{arctg} e^{i\varphi}$; $\operatorname{Im} \operatorname{arctg} e^{i\varphi}$, где φ вещественно.

2199. Какую линию описывает точка z, если $z = \frac{1 + \rho e^{i\theta}}{1 - \rho e^{i\theta}}$, когда:

1) ρ меняется от 0 до ∞ и $\theta = \text{const}$;
2) θ меняется от 0 до 2π и $\rho = \text{const}$.

2200. Доказать, что когда точка z описывает дугу окружности, проходящую через точки 1 и -1, то точка w описывает тоже дугу (другой) окружности, если $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$. Детально разобрать соответствие дуг.

Указание. Удобно положить $\frac{1+z}{1-z} = \rho e^{i\theta}$.

2201. В какой области верно неравенство $\left|\frac{2z}{1+z^2}\right| < 1$?

2202. Если $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$, то в какую область плоскости w отобразится такая область плоскости z:

1) первый квадрант;
2) $|z| \geqslant 1$;
3) $1 < |z| \leqslant R$;
4) $\frac{1}{R} \leqslant |z| < 1$;
5) $\alpha \leqslant \arg z \leqslant \pi - \alpha$; $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

2203. В какую область плоскости w отобразится первый квадрант плоскости z, если $w = \frac{z}{\sqrt{1 - z^2}}$ и считать $\sqrt{1 - z^2} = 1$ при $z = 0$.

Указать соответствие границ и вид на плоскости w линии $\arg \frac{1-z}{1+z} = \text{const}$.

2204. Во что преобразуется верхняя полуплоскость z на плоскости w, если $\cos w = \operatorname{ch} a \cos z$ и при $z = \frac{\pi}{2}$ величина $w = \frac{\pi}{2}$.

2205. Функция $w = \operatorname{arctg} z$ преобразует круг $|z| < 1$ на полосу в плоскости w. Найти ширину этой полосы.

2206. На какую область отображается круг $|z| < 1$ функцией $w = a(nz - z^n)$, где $a > 0$, $n > 1$ — целое? Найти площадь этой области.

2207. Функция $w = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ отображает некоторую область S_n в верхнюю полуплоскость. Найти S_n и $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$.

2208. Точка $w = \frac{a^2}{\bar{z}}$ называется отражением точки z в окружности $|z| = a$. Найти отражение в этой окружности полуплоскости

$$\operatorname{Re} z > 2a.$$

2209. Найти, в какую область на плоскости w отобразится полоса $0 \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant \pi$, если $w = z + e^z$.

Указать соответствие границ.

§ 2. Уравнения Коши — Римана или Эйлера — Даламбера

Для функции $w = f(z)$, аналитической или регулярной в области S, имеется равенство $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, где вещественные функции u и v удовлетворяют условиям Коши — Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Пользуясь ими, можно найти одну из функций с точностью до постоянной интегрирования, когда известна другая, если только заданная функция $\varphi(x, y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$. При этом, если дана функция $u(x, y)$, то можно, например, пользоваться интегралом:

$$v(x, y) = \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy.$$

Найти аналитическую функцию $w(z)$ по следующим условиям:

2210. $u = x^2 - y^2 + xy$; $w(0) = 0$.

2211. $u = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3$; $w(0) = 0$.

2212. $v = \frac{y}{x^2 + y^2}$; $w(2) = 0$.

2213. $v = \frac{x + y}{x^2 + y^2}$.

2214. $u = e^x(x \cos y - y \sin y)$; $w(0) = 0$.

2215. $u = \frac{2 \sin 2x}{e^{2y} + e^{-2y} - 2 \cos 2x}$.

2216. $u = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, где φ — некоторая функция.

2217. $u=F(x+\sqrt{x^2+y^2})$.

2218. $v=f(x^2+y^2)$.

2219. Доказать, что уравнение $u(x, y)=C$ может изображать семейство линий равного потенциала только в том случае, если отношение величин

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

есть функция только одного u.

2220. Доказать, что кривые $x^n+y^n=C$ могут быть линиями равного потенциала только при $n=1$ и при $n=2$.

2221. Доказать, что если найдена (когда это возможно) аналитическая функция w, такая, что на семействе $\varphi(x, y)=C$ ее вещественная часть постоянна, то самый общий вид аналитических функций ζ, удовлетворяющих тому же требованию $\operatorname{Re}\zeta=\text{const}$ на линиях $\varphi(x, y)=C$ будет такой: $\zeta=Aw+B$, где A и B постоянные, причем A — вещественно.

2222. Доказать, что если найдена (когда это возможно) аналитическая функция w, у которой $\operatorname{Re} w=\text{const}$ на линиях семейства $\varphi(x, y)=C$, то самый общий вид аналитических функций ζ, для которых: 1) на том же семействе $|\zeta|=\text{const}$, будет $\zeta=Ae^{aw}$, 2) на том же семействе $\operatorname{Arg}\zeta=\text{const}$; будет $\zeta=Ae^{iaw}$, где A и a постоянные, причем a — вещественно.

Найти аналитическую функцию $w(z)$ по условиям:

2223. Линии $\operatorname{Re} w(z)=c$ — окружности $x^2+y^2=a^2$.

2224. Линии $|w(z)|=c$ — окружности $x^2+y^2=ax$.

2225. Линии $|w(z)|=c$ — лемнискаты $r^2=a^2\sin 2\varphi$.

2226. Линии $\arg w(z)=c$ — окружности $x^2+y^2=a^2$.

2227. Линии $|w(z)|=c$ — параболы $x+\sqrt{x^2+y^2}=a$.

2228. Линии $|w(z)|=c$ — конфокальные эллипсы

$$\frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{\lambda^2-c^2}=1; \quad \lambda>c.$$

2229. Линии $\operatorname{Arg} w=c$ — прямые, параллельные прямой $y=kx$.

2230. Доказать равенство:

$$\frac{\partial^2|w(z)|^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2|w(z)|^2}{\partial y^2}=4\left|\frac{\partial w}{\partial z}\right|^2.$$

2231. Доказать, что если на плоскости z две линии пересекаются ортогонально и в этой точке пересечения w регулярна, то в ней $\frac{\partial u}{\partial \sigma_1}=\frac{\partial v}{\partial \sigma_2}$; $\frac{\partial u}{\partial \sigma_2}=-\frac{\partial v}{\partial \sigma_1}$, где σ_1 и σ_2 длины дуг этих кривых, и направления отсчета выбраны так, что вращение от положительного направления первой кривой к положительному направлению второй — положительно.

2232. Доказать, что на дуге кривой, на которой $|w| = \text{const}$, аргумент этой функции меняется монотонно, если на этой дуге нет особых точек w.

§ 3. Особые точки функции. Ряды Тейлора и Маклорена. Ряд Лорана

Найти особые точки функций;

2233. $\dfrac{z}{z^2+1}$. **2234.** $\dfrac{1}{z-z^3}$. **2235.** $\dfrac{1}{\sin z}$.

2236. $\dfrac{1}{e^z-1}-\dfrac{1}{z}$. **2237.** $\sin\dfrac{1}{z}$. **2238.** $\sqrt{1-z^2}$.

2239. $\sqrt{1-z^3}$. **2240.** $e^{\sqrt{z}}$. **2241.** $\sqrt{e^z}$.

2242. $\sqrt{z}\, e^{\sqrt{z}}$. **2243.** $\dfrac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$.

2244. Построить линии равного модуля и равного аргумента для функции $w = e^{\frac{1}{z}}$, и показать, что при любом $A \neq 0$ уравнение $e^{\frac{1}{z}} = A$ в любой данной окрестности точки $z = 0$ имеет бесчисленное множество корней.

2245. Показать, что в той же области уравнение $\cos\dfrac{1}{z} = A$ имеет бесконечное множество корней, при любом значении A.

2246. Изучить изменение $\arg\sqrt[n]{z-a}$, если точка описывает простой замкнутый контур, обходящий точку $z = a$ в положительном направлении.

2247. Изучить изменение функции $\sqrt{1-z^2}$, если точка z описывает простой замкнутый контур одного из трех видов:

a) обходящий одну из точек $z = \pm 1$,

b) обходящий обе эти точки,

c) оставляющий эти точки вне контура.

2248. Найти в точке $z = -e$ значение функции $w = z^z = e^{z \ln z}$, если w равно 1 при $z = 1$ и если w изменяется непрерывным образом при движении z в верхней полуплоскости или при движении в нижней полуплоскости.

2249. Найти при $z = e^{-\varphi i}$ значение той ветви функции $\sqrt{z - e^{\varphi i}}$, которая при $z = 0$ имеет значение $ie^{\frac{\varphi i}{2}}$ и которая непрерывно продолжается при движении z вдоль по радиусу из начала координат в точку $z = e^{-\varphi i}$.

2250. В полуплоскости $y > 0$ проведен разрез по линиям: $x = 0$, $y > 1$ и $x^2 + y^2 = 1$; $y > 0$; функция $\ln(1 - z^2)$ равна нулю при $z = 0$. Найти ее значение при $z = 3$.

2251. Показать, что функция $w = \ln(z + \sqrt{z^2 - 1})$ однозначна, в плоскости с надрезами по вещественной оси при $-\infty < x < -1$ и $1 < x < \infty$. Найти значения w при $z = +i$ и $z = -i$, если на верхнем краю правого надреза величины $\sqrt{z^2 - 1}$ и w положительны.

Пользуясь разложением в ряд для $\frac{1}{\cos z}$ и $z \operatorname{ctg} z$, доказать равенства:

2252. $\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{z}{2}\right) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$; $|z| < \frac{\pi}{2}$;

E_n — числа Эйлера ($E_0 = 1$) (см. ч. I задача 1716).

2253. $\operatorname{tg} z = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}(2^{2n} - 1) B_n}{(2n)!} z^{2n-1}$; $|z| < \frac{\pi}{2}$;

B_n — числа Бернулли (см. ч. I задача 1717).

2254. $\frac{z}{\sin z} = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2^{2n} - 2) B_n}{(2n)!} z^{2n}$; $|z| < \pi$.

2255. $\ln \frac{\sin z}{z} = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1} B_n}{n(2n)!} z^{2n}$; $|z| < \pi$.

2256. $\ln \cos z = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1}(2^{2n-1} - 1) B_n}{n \cdot (2n)!} z^{2n}$; $|z| < \frac{\pi}{2}$.

2257. Найти первые шесть коэффициентов в разложении функций по степеням z и определить области сходимости этих рядов:

$$w_1 = \frac{z}{\ln(1+z)}; \quad w_2 = \frac{z}{\operatorname{arctg} z}.$$

2258. Разложить в ряд по степеням z ту ветвь функции $\sqrt{z+i}$, значение которой при $z = 0$ равно $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

2259. Найти круги сходимости разложений по степеням z функций: $\frac{\sin \pi z^2}{\sin \pi z}$ и $\frac{\cos 2\pi z^2}{\cos \pi z}$.

2260. Разложить в ряд по степеням z функцию $\frac{1}{z} e^z \sin z$ и указать радиус сходимости этого ряда.

2261. Разложить в ряд по степеням $z - a$ функцию $ze^z \cos z$ и указать радиус сходимости этого ряда.

Разложить следующие функции в ряд Лорана в указанных областях:

2262. $\frac{z}{(z^2-4)(z^2-1)}$ при $1<|z|<2$.

2263. $\frac{1}{(z^2-1)(z^2-4)^2}$ при $1<|z|<2$.

2264. Ту же функцию, что и в задаче 2263 при $|z|>2$.

2265. $\operatorname{ctg} z$ при $|z|<\pi$ и при $\pi<|z|<2\pi$.

2266. $\frac{1}{z-2}\ln\frac{z-i}{z+i}$ при $1<|z|<2$, считая при $z=2i$ величину логарифма вещественной.

2267. Ту же функцию, что и в задаче 2266 при $|z|>2$.

2268. $z^5 e^{\frac{1}{z}}$.

2269. $e^{z+\frac{1}{z}}$.

2270. $\sqrt{z^2-z}$, для $|z|>1$.

2271. Если радиус сходимости ряда $\varphi(z)=\sum a_n z^n$ равен r, то каковы радиусы сходимости рядов:

$\sum a_n n^p z^n$; $\sum \frac{a_n}{n^p} z^n$; $\sum a_n n!\, z^n$; $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$. Найти суммы первых двух рядов.

Доказать теоремы:

2272. Если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ имеет на краю сходимости лишь одну особую точку, а именно полюс порядка m, то справедливо равенство: $a_n=\frac{An^{m-1}}{z_0^n}[1+\varepsilon(n)]$, где $\varepsilon(n)\to 0$ при $n\to\infty$, A — постоянная, z_0 — полюс.

2273. Если радиус сходимости степенного ряда $\sum a_n z^n$ равен единице, а особые точки на круге сходимости лишь полюсы, порядок которых не больше, чем m, то коэффициенты ряда не превосходят An^{m-1}, где A — постоянная.

2274. Если у ряда $\sum a_n z^n$ все $a_n \geqslant 0$, а радиус круга равен 1, то $z=1$ является особой точкой. (Доказательство от противного, основанное на разложении суммы ряда по степеням $z-a$, где $0<a<1$.)

2275. Если радиус сходимости рядов $\sum a_n z^n$ и $\sum \operatorname{Re} a_n \cdot z^n$ равен 1 и все $\operatorname{Re} a_n \geqslant 0$, то точка $z=1$ — особая точка для сумм этих рядов.

2276. Коэффициенты ряда $\sum a_n z^n$ положительны и монотонно убывают, стремясь к нулю.

Доказать, что: 1) радиус сходимости не меньше единицы; 2) если радиус сходимости равен 1, то на окружности $|z|=1$ ряд сходится везде с одним лишь возможным исключением: $z=1$.

2277. Бесконечный ряд $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ сходится во всех точках окружности круга сходимости, но на ней должны быть особые точки. Найти их и определить их природу.

2278. Доказать, что $f(x)=\sum\limits_{0}^{\infty} e^{-in^2 z}$ аналитична в области $\operatorname{Im} z > 0$.

2279. Доказать: если $\varphi(z)=\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$, то

$$\varphi(z)+\varphi(1-z)=\frac{\pi^2}{6}-\ln z \ln(1-z),$$

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1} n^2}=\frac{\pi^2}{6}-(\ln 2)^2.$$

Считая ряд Фурье вещественной (или мнимой) частью ряда Тейлора или Лорана на единичном круге и, оперируя с этим рядом, найти суммы следующих тригонометрических рядов:

2280. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$; $0<x<2\pi$.

2281. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$; $0<x<\pi$.

2282. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{2n+1}$; $0<x<\pi$.

2283. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2-1}$; $0<x<2\pi$.

2284. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2-1}$; $0<x<2\pi$.

2285. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 nx}{n^2}$; $0\leqslant x\leqslant\pi$.

2286. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin^2 n\theta \sin^2 n\varphi}{n^2}$; $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$; $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$.

2287. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin 2n\theta \sin^2 n\varphi}{n}$; $0 < \theta < \pi$; $0 < \varphi < \pi$.

§ 4. Вычеты и их применения

Найти вычеты следующих функций в указанных точках:

2288. $\dfrac{1}{z^3 - z^5}$ в точках $z = 0$, $z = \pm 1$.

2289. $\dfrac{z^2}{(z^2+1)^2}$ в точках $z = \pm i$.

2290. $\dfrac{z^{2n}}{(z+1)^n}$ в точках $z = -1$ и $z = \infty$.

2291. $e^z \ln \dfrac{z-\alpha}{z-\beta}$ в точке $z = \infty$.

2292. $\dfrac{\sin^3 z}{z^6}$ в точке $z = 0$.

2293. $\dfrac{\cos^6 z}{z^6}$ в точке $z = 0$.

Вычислить интегралы от следующих функций по указанным кривым, беря обход против часовой стрелки:

2294. $\displaystyle\int \frac{dz}{z^4+1}$ вдоль окружности $x^2 + y^2 = 2x$.

2295. $\displaystyle\int \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}$ вдоль окружности $x^2 + y^2 = 2x + 2y$.

2296. $\displaystyle\int \frac{dz}{(z^2-1)^2(z-3)^2}$ по астроиде $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}$.

2297. $\displaystyle\int \frac{dz}{(z-a)^n(z-b)^n}$; $|a| < 1$, $|b| < 1$, по окружности $|z| = 1$, n — целое положительное.

2298. $\displaystyle\int \frac{dz}{(z^2-1)(z^3-1)}$ по окружности $|z| = r \neq 1$.

2299. $\displaystyle\int \frac{dz}{z^3(z^{10}-2)}$ по окружности $|z| = 2$.

2300. v. p. $\displaystyle\int\limits_{\gamma} \frac{z^2\,dz}{e^{2\pi i z^3} - 1}$ по контуру полукруга $|z| \leqslant R$, $\operatorname{Re} z \geqslant 0$, где $n < R^3 < n+1$, n — целое положительное.

2301. Найти интеграл $\int \frac{dt}{(z^4+1)\sqrt{z^2+1}}$, взятый по параболе $x=y^2$ в направлении возрастающих y, считая, что значение $\sqrt{z^2+1}$ равно единице при $z=0$.

2302. При каком соотношении между a и b будет однозначна функция

$$\int_1^t \frac{at \sin t + b \cos t}{t^3}\, dt.$$

2303. Вычислить $\oint \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$, взятый по окружности $\left|z-\frac{1}{2}\right|=r$, считая, что на отрезке $-1<z<1$ корень $\sqrt{1-z^2}$ имеет положительное значение и разрез сделан по линиям $-\infty<x<-1$ и $1<x<\infty$.

Вычислить интегрированием по контуру следующие интегралы:

2304. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\, dx.$

2305. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4+1}{x^6+1}\, dx.$

2306. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\, dx}{(x^2+a^2)^2}.$

2307. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^2 (x^2+b^2)}.$

2308. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2m}\, dx}{1+x^{2n}}$; $m<n$, m и n целые, положительные.

2309. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{1+2\lambda\cos\varphi+\cos^2\varphi}$, если $0<\lambda<1$ и его главное значение, если $\lambda>1$.

2310. $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{(1-2x\cos\alpha+x^2)\sqrt{x}}$, $-\pi<\alpha<\pi$.

2311. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\cos\varphi+a}$; $a>1$ (положить $z=e^{i\varphi}$).

2312. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(a^2+b^2\cos\varphi)^2}$, если $a>b>0$.

2313. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos^2 2\varphi\, d\varphi}{1-2p\cos\varphi+p^2}$; $|p|<1$.

2314. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\varphi\, d\varphi}{1-2p\cos 2\varphi+p^2}$; $|p|<1$.

2315. $\int\limits_0^{\pi} \operatorname{ctg}(x-a)\,dx$; $\operatorname{Im} a \neq 0$.

2316. $\int\limits_0^{\infty} e^{-a^2x^2}\cos bx\,dx$.

2317. $\int\limits_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(n\theta-\sin\theta)\,d\theta$.

2318. $\int\limits_0^{\infty} e^{a\cos bx}\sin(a\sin bx)\frac{dx}{x}$.

2319. $\int\limits_0^{1} \frac{x^2\,dx}{\sqrt[3]{x-x^3}}$.

Пользуясь леммой Жордана, вычислить интегралы:

2320. $I_1=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iaz}}{z-ir}dz$; $I_2=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iaz}\,dz}{z+ir}$; $\operatorname{Re} r>0$; $a>0$.

2321. $\int\limits_0^{\infty}\frac{x\sin ax\,dx}{x^2+r^2}$.

2322. $\int\limits_0^{\infty}\frac{\cos ax}{x^2+r^2}dx$.

2323. $\int\limits_0^{\infty}\frac{\cos^2 x\,dx}{x^2+a^2}$; $a>0$.

2324. $\int\limits_0^{\infty}\frac{x\sin x}{1+x^2+x^4}dx$.

2325. $\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin ax}{x(1-x^2+x^4)}dx$.

2326. $\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx$.

2327. $\int\limits_0^{\infty}\frac{\cos ax}{1+x^4}dx$; $a>0$.

2328. $\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin ax\,dx}{x(x^2+b^2)}$; $a>0$, $b>0$.

2329. Исходя из равенства $\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, доказать формулы для интегралов Френеля:

$$\int\limits_0^{\infty}\cos(x^2)\,dx=\int\limits_0^{\infty}\sin(x^2)\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

2330. Доказать, что:

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin x}{x+a}dx=\int\limits_0^{\infty}\frac{e^{-ax}}{1+x^2}dx,\quad \text{если } a>0.$$

Доказать равенства:

2331. $\int\limits_0^\infty x^{s-1}e^{-ix}\,dx=\Gamma(s)\,e^{-\frac{\pi s i}{2}};\quad 0<\operatorname{Re}s<1.$

2332. $\int\limits_0^\infty \cos x^n\,dx=\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\cos\frac{\pi}{2n};\quad n>1.$

2333. $\int\limits_0^\infty \sin x^n\,dx=\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\sin\frac{\pi}{2n};\quad n>1$

2334. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x^n\,dx}{x^n}=\frac{1}{n-1}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\cos\frac{\pi}{2n};\quad 0<\frac{1}{n}<2.$

2335. $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i}\Gamma(s)\,z^{-s}\,ds=e^{-z};\quad a>0;\ \operatorname{Re}z>0.$

(Воспользоваться теоремой:

$$\lim_{|s|\to\infty}\left[\ln\Gamma(s)-\left(s-\frac{1}{2}\right)\ln s+s-\frac{1}{2}\ln 2\pi\right]=0,$$

если s находится направо от любой данной вертикальной прямой.)

2336. $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{x^s}{s}\,ds=\left\{\begin{array}{l}1,\ \text{если}\ x>1,\\ 0,\ \text{если}\ x<1;\end{array}\right\}a>0,\quad x>0.$

2337. $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{x^s}{s^2}\,ds=\left\{\begin{array}{ll}\ln x, & \text{если}\ x>1,\\ 0, & \text{если}\ x<1;\end{array}\right\}a>0,\quad x>0.$

2338. $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{x^{s+2}}{s(s+1)(s+2)}\,ds=\left\{\begin{array}{ll}\frac{(x-1)^2}{2}, & \text{если}\ x>1,\\ 0, & \text{если}\ x<1;\end{array}\right\}a>0.$
$x>0.$

2339. $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}e^{pt}\,\frac{dp}{p^2-\gamma^2}=\left\{\begin{array}{ll}\frac{1}{\gamma}\operatorname{sh}\gamma t, & \text{если}\ t>0,\\ 0, & \text{если}\ t<0;\end{array}\right\}a>\gamma.$

2340. $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}e^{pt}\,\frac{dp}{p(p^2+\gamma^2)}=\left\{\begin{array}{ll}\frac{1-\cos\gamma t}{\gamma^2}, & \text{если}\ t>0,\\ 0, & \text{если}\ t<0;\end{array}\right\}a>0.$

2341. $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}e^{pt}\,\frac{dp}{\sqrt{p}}=\left\{\begin{array}{ll}\frac{1}{\sqrt{\pi t}}, & \text{если}\ t>0,\\ 0, & \text{если}\ t<0;\end{array}\right\}a>0.$

2342. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(e^{i\varphi}) - f(e^{-i\varphi})}{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}} d\varphi = \frac{\pi}{2} f(1) - \int\limits_0^1 \frac{f(ix) - f(-ix)}{1 + x^2} dx,$ если $f(x)$ голоморфна в правой половине круга $|z| < 1$.

2343. Вычислить $\int \frac{\Phi(z)\, dz}{z^2 - 2z\cos\alpha + 1}$, взятый по контуру единичного круга с обходами полюсов и считая $\Phi(z)$ голоморфной на этом круге, убедиться, что

$$\text{v. p.} \int\limits_0^{\pi} \frac{\Phi(e^{i\theta}) + \Phi(e^{-i\theta})}{\cos\theta - \cos\alpha} d\theta = \pi \frac{\Phi(e^{i\alpha}) - \Phi(e^{-i\alpha})}{i \sin\alpha}.$$

В частности $\text{v. p.} \int\limits_0^{\pi} \frac{\cos n\theta}{\cos\theta - \cos\alpha} d\theta = \pi \frac{\sin n\alpha}{\sin\alpha}$, если n — целое, положительное.

2344. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\cos x - e^{-x}}{x} dx = 0.$

2345. $\int\limits_0^{\infty} \frac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2} \frac{\sin x}{x} dx = \pi\left(e^{-a} - \frac{1}{2}\right); \quad a > 0.$

2346. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\cos ax}{\operatorname{ch} x + \cos b} dx = \frac{\pi}{\sin b} \cdot \frac{\operatorname{sh} ab}{\operatorname{sh} a\pi}$, считая a вещественным и $0 < b < \pi$.

2347. $\int\limits_0^{\infty} \frac{x \operatorname{sh} x\, dx}{\operatorname{ch} 2x + \cos 2a} = \frac{\pi a}{4 \sin a}$, считая $0 < a < \frac{\pi}{2}$.

Пользуясь контуром, который целиком или частью состоит из краев разреза вдоль положительной или отрицательной части Ox и окружностей вокруг начала радиусов $\rho \to 0$ и $R \to \infty$, доказать равенства:

2348. $\int\limits_0^{\infty} \frac{x^{p-1} dx}{1 + x} = \frac{\pi}{\sin \pi p}; \quad 0 < p < 1.$

2349. $\text{v. p.} \int\limits_0^{\infty} \frac{x^{a-1} dx}{1 - x} = \pi \operatorname{ctg} a\pi; \; 0 < a < 1.$

2350. $\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{x}\ln x}{(1+x)^2}\,dx = \pi.$

2351. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}-e^{bx}}{1-e^x}\,dx = \pi[\operatorname{ctg} a\pi - \operatorname{ctg} b\pi]; \quad 0<a<1,\ 0<b<1.$

2352. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sum \lambda_\nu e^{a_\nu x}dx}{1-e^x} = \pi \sum \lambda_\nu \operatorname{ctg} \pi a_\nu; \quad 0<a_\nu<1; \sum \lambda_\nu = 0.$

2353. $\int\limits_0^\infty \frac{x^{-p}\,dx}{1+2x\cos\lambda + x^2} = \frac{\pi}{\sin \pi p}\cdot\frac{\sin p\lambda}{\sin\lambda}; \quad -1<p<1;$
$-\pi<\lambda<\pi.$

Получить при $-1<p<2$ следующие равенства, пользуясь контуром, в состав которого входит разрез по оси Ox между точками $z=0$ и $z=1$, дополненный кружками радиуса $\rho\to 0$ вокруг этих точек.

2354. $\int\limits_0^1 \frac{x^{1-p}(1-x)^p}{(1+x)^3}\,dx = \frac{\pi p(1-p)}{8\sin\pi p}\cdot 2^p.$

2355. $\int\limits_0^1 \frac{x^{1-p}(1-x)^p}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{\sin \pi p}\left[2^{\frac{p}{2}}\cos\frac{\pi p}{4} - 1\right].$

2356. $\int\limits_0^1 \frac{x^{1-p}(1-x)^p}{(a+x)^2}\,dx = \frac{\pi}{\sin \pi p}\left[\frac{1+a-p}{a}\left(\frac{1+a}{a}\right)^{p-1} - 1\right].$

2357. $\int\limits_0^1 \frac{x^{1-p}(1-x)^p}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin \pi p}[1+p-2^p].$

2358. $\int\limits_{-1}^1 \frac{(1+x)^{1-p}(1-x)^p}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{\sin \pi p}\left[\sin\frac{\pi p}{2} + \cos\frac{\pi p}{2} - 1\right].$

2359. Взяв $\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^3}}$ по контуру, состоящему из петель около точек разветвления, отрезков Ox по обоим берегам разреза $0<x<\infty$ и большого круга, убедиться, что

$$\int\limits_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} = 2\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}.$$

2360. Вычислить $\int\limits_0^\infty \ln \frac{e^x+1}{e^x-1} dx$.

Доказать равенства:

2361. $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)(\ln^2 x+\pi^2)} = \frac{\pi}{2a} \cdot \frac{1}{\ln^2 a + \frac{\pi^2}{4}} - \frac{1}{1+a^2}$; $a > 0$.

2362. $\int\limits_0^{\pi/2} \ln \cos \varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{2} \ln \frac{1}{2}$, интегрируя $\frac{1}{z} \ln \frac{z+z^{-1}}{2}$.

2363. $\int\limits_0^\infty x^{a-1} \varphi(x)\, dx = \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi i a}} \sum \operatorname{Res} z^{a-1} [\varphi(z)], \quad 0 < a < 1,$

где $\sum \operatorname{Res} z^{a-1}[\varphi(z)]$ означает сумму вычетов функции $z^{a-1}\varphi(z)$, взятую по всем полюсам рациональной функции $\varphi(z)$. Предполагается, что $\varphi(z) \to 0$ при $z \to \infty$.

2364. $\int\limits_0^\infty \frac{\varphi(x)}{\ln^2 x + \pi^2} dx = \sum \operatorname{Res} \frac{1}{\ln z - \pi i} [\varphi(z)]$,

где $\varphi(z)$ — рациональная функция, и $z\varphi(z) \to 0$ при $z \to \infty$.

Доказать теоремы:

2365. Если $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} f(n)$ абсолютно сходится, а $f(z)$ — мероморфная функция, регулярная при всех целых z, и существует последовательность контуров $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$, удаляющихся по всем направлениям в бесконечность при $n \to \infty$ так, что

$$\int\limits_{C_n} f(z) \operatorname{ctg} \pi z \, dz \to 0, \quad (*)$$

то справедливо равенство:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} f(n) = -\pi \sum \operatorname{Res} \operatorname{ctg} \pi z \, [f(z)],$$

где $\sum \operatorname{Res} \varphi(z) [f(z)]$ означает сумму вычетов функции $\varphi(z) f(z)$, взятую по полюсам $f(z)$.

2366. При подобных же условиях, где вместо (*) дано условие:

$$\int\limits_{C_n} \frac{f(z)}{\sin \pi z}\, dz \to 0, \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

справедливо равенство:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n f(n) = -\sum \operatorname{Res} \frac{\pi}{\sin \pi z}\, [f(z)].$$

Доказать равенства:

2367. $\displaystyle\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a+bn)^2} = \frac{\pi^2}{b^2} \operatorname{cosec}^2 \frac{\pi a}{b}.$

2368. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = -\frac{1}{2a^2} + \frac{\pi}{2a} \operatorname{cth} \pi a.$

2369. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+a^2} = -\frac{1}{2a^2} + \frac{\pi}{2a} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh} \pi a}.$

2370. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{\operatorname{sh} \pi a n} = -\frac{1}{2\pi a} - \frac{1}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{\operatorname{sh} \frac{\pi n}{a}}.$

2371. $\displaystyle\frac{1}{e^{\pi} - e^{-\pi}} - \frac{2}{e^{2\pi} - e^{-2\pi}} + \frac{3}{e^{3\pi} - e^{-3\pi}} - \ldots = \frac{1}{8\pi}.$

2372. Полагая по определению

$$f(u) = \int\limits_{\gamma} \frac{e^{-\pi i z^2 + 2\pi i u z}}{e^{\pi i z} - e^{-\pi i z}}\, dz,$$

где интегрирование идет снизу вверх по всей прямой $x + y = \frac{1}{2}$, проверить тождество:

$$f(u+1) - f(u) = e^{\pi i \left(u+\frac{1}{2}\right)^2} \int\limits_{\gamma} e^{-\pi i z^2}\, dz.$$

2373. Передвинув в предыдущей задаче контур интегрирования на прямую $x + y = -\frac{1}{2}$, доказать равенство:

$$f(u) = e^{-2\pi i u} f(u+1) + 1.$$

2374. Доказать, что $\int\limits_{\gamma} e^{-\pi i z^2} dz = e^{\frac{3\pi i}{4}}$ и, пользуясь предыдущими результатами, вывести формулу Римана:

$$\int\limits_{\gamma} \frac{e^{-\pi i z^2 + 2\pi i u z}}{e^{\pi i z} - e^{-\pi i z}} dz = \frac{e^{\pi i u} - e^{\pi i u^2}}{e^{\pi i u} - e^{-\pi i u}}.$$

2375. Рассмотреть интеграл от функции $\dfrac{e^{\frac{2\pi i z^2}{n}}}{1 - e^{2\pi i z}}$, где n — целое, положительное, по краю области

$$0 < x < \frac{n}{2}; \quad -\omega < y < \omega; \quad |z| > \rho; \quad \left|z - \frac{n}{2}\right| > \rho.$$

Предельным переходом, при $\rho \to 0$, $\omega \to \infty$, получить формулу для суммы Гаусса:

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi i \nu^2}{n}} = \frac{1 + (-i)^n}{1 - i} \cdot \sqrt{n}.$$

§ 5. Распределение корней функции

По теореме Руше, функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, регулярные внутри контура, имеют там одинаковое число нулей, если на контуре $|\varphi(z) - \psi(z)| < |\varphi(z)|$. Пользуясь этим, найти число корней, лежащих в круге $|z| < 1$, для следующих уравнений:

2376. $z^4 - 5z + 1 = 0$.

2377. $z^6 - 6z + 10 = 0$.

2378. $z^8 - 4z^5 + z^2 - 1 = 0$.

2379. $z = \varphi(z)$, где $|\varphi(z)| < 1$ при $|z| \leqslant 1$.

Сколько корней в каждом квадранте имеют уравнения:

2380. $z^4 + 2z^3 + 3z^2 + z + 2 = 0$.

2381. $2z^4 - 3z^3 + 3z^2 - z + 1 = 0$.

Доказать следующие утверждения:

2382. При $\lambda > 1$ уравнение $z = \lambda - e^{-z}$ в полуплоскости $x > 0$ имеет единственный и притом вещественный корень.

2383. $z = ae^z$ имеет при $0 < a < \frac{1}{e}$ лишь один корень в круге $|z| \leqslant 1$.

2384. Уравнение $z^2 = ae^z$, где $0 < a < \frac{1}{e}$, в круге $|z| < 1$ имеет два корня. Они вещественны и разных знаков.

2385. Уравнение $1+z+az^n=0$, где n — целое число, большее единицы, имеет в круге $|z|<2$, при любом a, по крайней мере один корень.

2386. Уравнение $z=\operatorname{tg} z$ имеет только вещественные корни — трехкратный корень $z=0$ и корни $z_n=(2n+1)\frac{\pi}{2}-\rho_n$, где $\rho_n \to 0$ при $n \to \infty$.

2387. Уравнение $\operatorname{ch} z \cos z=1$ имеет четырехкратный корень $z=0$ и корни вида $\pm r_n$, $\pm i r_n$, где $r_n-\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi \to 0$ при $n \to \infty$.

2388. Если функции $\varphi_n(z)$, регулярные в области, равномерно стремятся в ней и на ее границе к функции $\psi(z)$, отличной от тождественного нуля, то каждый корень $\psi(z)$ есть предел соответствующего корня $\varphi_n(z)$.

2389. Если, при тех же условиях, функция $\psi(z)$ имеет внутри области корень $z=z_0$ кратности n, а $|\varphi(z)-\psi(z)|<\rho$ на краю области, то функция $\varphi(z)$ имеет n корней в круге $|z-z_0|<C\sqrt[n]{\rho}$, где C — соответствующая постоянная, а $\rho \to 0$.

2390. Если $\operatorname{Im} z_\nu>0$, а $\prod_{\nu=1}^{n}(z-z_\nu)=\varphi(z)+i\psi(z)$, где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — многочлены с вещественными коэффициентами, то корни этих многочленов будут вещественными, простыми, перемежающимися.

2391. При тех же условиях, что и в предыдущей задаче, и при $a>0$ такими же свойствами обладают и корни уравнений:

$$\varphi(z)\sin az+\psi(z)\cos az=0, \quad \varphi(z)\cos az-\psi(z)\sin az=0.$$

2392. Число корней вещественного тригонометрического многочлена $\sum_{\nu=m}^{n}(a_\nu \cos \nu\varphi+b_\nu \sin \nu\varphi)$, в интервале $0 \leqslant \varphi<2\pi$ не меньше $2m$ и не больше $2n$.

Указание. Рассмотреть многочлен $P(z)=\sum_{\nu=m}^{n}(a_\nu-ib_\nu)z^\nu$.

2393. При $a_0<a_1<a_2<\ldots<a_n$ легко доказать умножением на $1-z$, что полином $\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu$ не имеет корней в области $|z| \geqslant 1$. Пользуясь этим, показать, что тригонометрический полином $\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \cos \nu\varphi$, с теми же a_ν, имеет в интервале $0 \leqslant \varphi<2\pi$ ровно $2n$ различных корней (так же, как и многочлен $\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \sin \nu\varphi$).

2394. Пусть при $0 < t < a$ функция $f(t) > 0$ и не убывает, а интеграл $\int\limits_0^a f(t)\,dt$ имеет смысл; требуется доказать, что целая функция $f(z) = \int\limits_0^a f(t) \cos zt\,dt$ имеет только вещественные нули (теорема Полиа).

2395. Доказать, что при тех же условиях, что и в предыдущей задаче, и при $b > 0$ целые функции

$$\varphi(z) = \int\limits_0^a f(t) \cos t(z+b)\,dt; \quad \psi(z) = \int\limits_0^a f(t) \sin z(t+b)\,dt$$

тоже имеют только вещественные нули.

2396. Пусть $f(z)$ регулярна в круге $|z| \leqslant r$ и имеет там корни $a_1, a_2, \ldots, a_n$, отличные от нуля и не расположенные на окружности $|z| = r$. Соединяя каждый из нулей a_ν разрезом с окружностью $|z| = r$ и интегрируя по полученному контуру соответствующую функцию, доказать формулу Иенсена — Якоби

$$\ln f(0) + \sum_{\nu=1}^{n} \ln \frac{r}{|a_\nu|} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \ln |f(re^{i\varphi})|\,d\varphi.$$

2397. Доказать, что если в условиях предыдущей задачи максимум $|f(z)|$ равен M, $|f(0)| = m$ и N — число нулей $f(z)$ в круге $|z| \leqslant \frac{r}{e}$, то

$$N \leqslant \ln \frac{M}{m}.$$

2398. Доказать теорему: корни функции

$$f(z) = Ae^{az} + Be^{bz} + \ldots + Me^{mz},$$

где $a > b > \ldots > m$, а числа A и M отличны от нуля, расположены в полосе $-\sigma < \operatorname{Re} z < \sigma$, а N — число их в прямоугольнике $-\sigma < \operatorname{Re} z < \sigma$, $0 < \operatorname{Im} z < T$ — выражается формулой:

$$N = \frac{a-m}{2\pi} \cdot T + O(1),$$

где $O(1)$ ограничено при $T \to \infty$.

§ 6. Разложение функций на простейшие дроби и в бесконечные произведения

Доказать справедливость следующих разложений в ряд дробей, имеющих место во всех точках, где разлагаемые функции регулярны.

2399. $\operatorname{ctg}(z-a)+\operatorname{ctg} a=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{z-a-n\pi}+\frac{1}{a+n\pi}\right).$

2400. $\frac{1}{\sin z}=\frac{1}{z}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2z}{z^2-n^2\pi^2}.$

2401. $\frac{1}{\cos z}=\pi\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)}{z^2-(2n-1)^2\frac{\pi^2}{4}}.$

2402. $\frac{\sin z}{\cos^2 z}=\sum\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\left[z-(2n+1)\frac{\pi}{2}\right]^2}.$

2403. $\frac{\pi^2}{\cos^2\pi z}=\sum\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(z+\frac{1}{2}-n\right)^2}.$

2404. $\frac{e^{az}}{e^z-1}=\frac{1}{z}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2z\cos 2\pi na-4\pi n\sin 2\pi na}{z^2+4n^2\pi^2};\quad 0<a<1.$

2405. $\frac{\sin az}{\sin\pi z}=\frac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n\cdot\sin na}{z^2-n^2};\quad -\pi<a<\pi.$

2406. $\frac{\operatorname{ch} az}{\operatorname{sh}\pi z}=\frac{1}{\pi z}+\frac{1}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2z\cos na}{z^2+n^2};\quad -\pi<a<\pi.$

2407. $\frac{1}{\operatorname{ch} 2z-\cos 2z}=\frac{1}{4z^2}+4\pi z^2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{\operatorname{sh}\pi n}\cdot\frac{1}{4z^4+n^4\pi^4}.$

2408. $\frac{z\sin z}{\sin z-z\cos z}=\frac{3}{z}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-\lambda_n^2};\quad \operatorname{tg}\lambda_n=\lambda_n>0.$

Доказать справедливость следующих разложений в бесконечные произведения:

2409. $\cos\frac{\pi z}{2}=\prod\limits_{n=0}^{\infty}\left[1-\frac{z^2}{(2n+1)^2}\right].$

2410. $\frac{\sin(z-a)}{\sin a}=e^{-z\operatorname{ctg} a}\prod\limits_{-\infty}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a+n\pi}\right)\cdot e^{\frac{z}{a+n\pi}}.$

2411. $$\cos\pi z - \cos\pi a = -\frac{\pi^2}{2}(z^2-a^2)\prod_{n=1}^{\infty}\left[1-\left(\frac{z+a}{2n}\right)^2\right]\times$$
$$\times\left[1-\left(\frac{z-a}{2n}\right)^2\right].$$

2412. $$e^z - e^a = e^{\frac{z+a}{2}}\cdot(z-a)\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\left(\frac{z-a}{2\pi n}\right)^2\right].$$

2413. $$\operatorname{ch} z - \cos z = z^2\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z^4}{4\pi^4 n^4}\right).$$

2414. $$\sin z - z\cos z = \frac{z^2}{3}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\lambda_n^2}\right);\quad \operatorname{tg}\lambda_n = \lambda_n > 0.$$

2415. $$\frac{\sin\pi z}{\pi z(1-z)} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z-z^2}{n+n^2}\right).$$

2416. $$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a^n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n;\quad |a|>1;\quad \prod_{\nu=1}^{n}(a^\nu-1) = \frac{(-1)^n}{c_n}.$$

2417. $$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{z^\nu}{(3\nu)!} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{8r_\nu^3}\right).$$
$$\ln 2\cos r_\nu\sqrt{3} = -3r_\nu;\quad r_\nu > 0.$$

2418. При $\operatorname{Re} s > 0$ для гамма-функции Эйлера существует представление в виде интеграла $\Gamma(s) = \int\limits_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx$. Легко доказать, что при $0 < x < n$ справедливы формулы:

$$e^{-x}\left(1-\frac{x^2}{2}\right) < \left(1-\frac{x}{n}\right)^n < e^{-x}.$$

Пользуясь этим, доказать данное Эйлером представление $\Gamma(s)$ в виде бесконечного произведения:

$$\Gamma(s) = \lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot2\cdot3\ldots n\cdot n^s}{s(s+1)\ldots(s+n)}.$$

2419. Пользуясь предыдущим, а также формулой

$$\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right] = C,$$

где C — постоянная Эйлера, доказать формулу Вейерштрасса:

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = se^{Cs}\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{s}{\nu}\right)e^{-\frac{s}{\nu}}.$$

Доказать равенства:

2420. $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n(a+b+n)}{(a+n)(b+n)}=\frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+1)}.$

2421. $\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}=-C-s+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+s}\right).$

2422. $\left[\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}\right]'=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(s+\nu)^2}.$

2423. $\ln s\Gamma(s)=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-C\right)+$

$$+\ln\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)}-\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}s^{\nu}}{\nu}\sigma_{\nu},$$

где $\sigma_{\nu}=\frac{1}{5^{\nu}}+\frac{1}{6^{\nu}}+\frac{1}{7^{\nu}}+\dots$

2424. $\lg_{10}x\Gamma(x)=\lg_{10}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{(1+x)(2+x)(3+x)(4+x)}+$

$$+0{,}65409856\,x \qquad -0{,}00005089\,x^5$$
$$+0{,}04805967\,x^2 \qquad +0{,}00000740\,x^6$$
$$-0{,}00353152\,x^3 \qquad -0{,}00000116\,x^7$$
$$+0{,}00038775\,x^4 \qquad +0{,}00000019\,x^8$$
$$-0{,}00000003\,x^9$$
$$\dots\dots\dots$$

Здесь $|x|<5$.

2425. Из Эйлеровского произведения для $\Gamma(s)$ следует, что

$$S=-\sum_{\nu=0}^{m}\ln(s+\nu)+\ln m!+s\ln m\to\ln\Gamma(s).$$

Если множитель -1, имеющийся в сумме, заменить по формуле $-1=\left(s+\nu-\frac{1}{2}\right)-\left(s+\nu+\frac{1}{2}\right)$, то легко получить равенства:

$$S=\sum_{\nu=0}^{m}\left[\left(s+\nu+\frac{1}{2}\right)\ln\frac{s+\nu+1}{s+\nu}-1\right]+\left(s-\frac{1}{2}\right)\ln s-$$
$$-\left(s+m+\frac{1}{2}\right)\ln(s+m+1)+\ln m!+s\ln m+m+1=$$
$$=\sum_{\nu=0}^{m}\left[\left(s+\nu+\frac{1}{2}\right)\ln\frac{s+\nu+1}{s+\nu}-1\right]+\left(s-\frac{1}{2}\right)\ln s-s+$$
$$+m+\ln m!-m\ln m-\frac{1}{2}\ln m+\frac{M}{m},$$

где M ограничено при $m\to\infty$.

Пользуясь сказанным, получить ряд Гудермана:

$$\ln \Gamma(s) = \left(s - \frac{1}{2}\right) \ln s - s + A + \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[\left(s + \nu + \frac{1}{2}\right) \ln \frac{s+\nu+1}{s+\nu} - 1\right],$$

где A — соответствующая постоянная, а равенство справедливо при всех s, отличных от чисел: 0, — 1, — 2, — 3, ...

2426. Применяя разложение $\cos \frac{\pi z}{2}$ в бесконечное произведение, доказать формулу Валлиса:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \to \infty} \left[\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n+1)}\right]^2 \cdot (2n+2),$$

а пользуясь ею, доказать, что постоянная A в ряду Гудермана равна $\ln \sqrt{2\pi}$.

2427. С помощью ряда Гудермана доказать, что

$$\ln \Gamma(s) - \left[\left(s - \frac{1}{2}\right) \ln s - s\right] \to \ln \sqrt{2\pi},$$

если расстояние точки s до отрицательной части вещественной оси безгранично растет, а $\operatorname{Re} s$ ограничена снизу.

2428. Доказать справедливость разложения:

$$\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(x)}{\Gamma(a+x)} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (a-1)(a-2)\dots(a-n)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \cdot \frac{1}{x+n}; \quad a > 0.$$

§ 7. Другие разложения в ряды

Некоторые из дальнейших задач решаются с помощью теоремы о ряде Лагранжа. В силу этой теоремы, если в области S расположена точка $z = a$, а на контуре имеется неравенство $|tf(z)| < |z - a|$, то уравнение относительно z

$$z = a + tf(z)$$

имеет в этой области единственный корень, представляющий функцию t. Если $F(z)$ — функция этого корня, регулярная в S, то имеет место разложение (ряд Лагранжа):

$$F(z) = F(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\{F'(a)\,[f(a)]^n\}^{(n-1)}\, t^n}{n!}.$$

В частности, например:

$$z = a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\{[f(a)]^n\}^{(n-1)}}{n!}\, t^n.$$

В следующих задачах разложить по возрастающим степеням w тот корень уравнения в z, который обращается в 0 при $w=0$.

2429. $w=2z+z^2$. **2430.** $w=ze^{-z}$.

2431. $(1-z^2)w=2z$. **2432.** $(z^{m+1}-b)w=-z$.

2433. Разложить e^z по возрастающим степеням w, если

$$(z+1)^2 w=z.$$

2434. Найти подобное же разложение для e^{-z}, где $zw=z-a$.

2435. Разложить в ряд по степеням эксцентриситета e эллиптической орбиты эксцентрическую аномалию E, связанную со средней аномалией M уравнением Кеплера:

$$E=M+e\sin E.$$

Алгебраические функции удовлетворяют уравнению: $f(x, y)=0$, где $f(x, y)$ — полином относительно комплексных переменных x и y. Если обе эти переменные остаются вещественными, то написанное уравнение изображает алгебраическую кривую. Если уравнение имеет степень n относительно y, то оно определяет n ветвей $y_1, y_2, \ldots, y_n$ многозначной функции от x. Они представляют регулярные функции от x в области, где их значения конечные и неравные. Если x_0 — точка, лежащая в такой области, то каждая из функций y_ν разлагается по целым степеням $x-x_0$. Если же в точке x_0 несколько из y_ν, например $y_1, y_2, \ldots, y_m$, равны, то в окрестности этой точки функции y_ν разлагаются по дробным степеням $x-x_0$ по формуле:

$$y=\sum_{\mu=\mu_0}^{\infty} a_\mu (x-x_0)^{\frac{\mu}{m}},$$

где число μ_0 может быть и отрицательным, а m не превосходит n. Значения a_μ можно найти подстановкой этих рядов в уравнение. Сами особые точки могут быть найдены из уравнений:

$$f(x, y)=0; \quad \frac{\partial f}{\partial y}=0.$$

Найти особые точки следующих уравнений:

2436. $y^3-3y+2x=0$.

2437. $y^3-3y^2+x^6=0$.

2438. $y^3-3y+2x^2(2-x^2)=0$.

2439. $y^3-3y+2x^3(2-x^3)=0$.

Найти первые два члена в разложении y по возрастающим степеням x для проходящих через начало ветвей следующих кривых:

2440. $x^3-3xy+y^3=0$.

2441. $y^4-4y=x$.

2442. $y^5+ax^4-b^2xy^2=0$.

2443. $4(x-1)y^5+2xy^3-3x^3y+x^4=0$.

Доказать теоремы:

2444. Функция $f(z)$, регулярная внутри эллипса с фокусами $z=\pm 1$ и контуром C, разлагается в этом эллипсе в ряд:

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{(z+\sqrt{z^2-1})^n-(z-\sqrt{z^2-1})^n}{\sqrt{z^2-1}},$$

где

$$A_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)(z-\sqrt{z^2-1})^n\,dz;\quad |z+\sqrt{z^2-1}|\geqslant 1.$$

2445. При тех же условиях справедливо разложение:

$$f(z)=B_0+\sum_{n=1}^{\infty} B_n\left[(z+\sqrt{z^2-1})^n+(z-\sqrt{z^2-1})^n\right],$$

где

$$B_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\frac{(z-\sqrt{z^2-1})^n}{\sqrt{z^2-1}}\,dz.$$

По теореме Коши для функции $f(x)$, удовлетворяющей в интервале $a<x<b$ условиям Дирихле внутри этого промежутка, имеет место разложение:

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi(\lambda_n)}{\psi'(\lambda_n)}e^{\lambda_n x}\int_a^b e^{-\lambda_n\mu}f(\mu)\,d\mu.$$

Здесь $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — целые функции, корни функции $\psi(z)$ простые и равны числам λ_n, а при $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ справедливы равенства:

$$\lim_{r\to\infty}\left[\frac{\psi(re^{i\theta})-\varphi(re^{i\theta})}{\varphi(re^{i\theta})}e^{(x-a)re^{i\theta}}\right]=\lim_{r\to\infty}\left[\frac{\varphi(-re^{i\theta})}{\psi(-re^{i\theta})}e^{(b-x)re^{i\theta}}\right]=0.$$

2446. Применяя разложение Коши при $\psi(z)=e^{\pi z}+1$, $\varphi(z)=-1$, получить разложение $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos(2n+1)(x-\mu)\cdot f(\mu)\,d\mu,$

$$\text{при } -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}.$$

2447. С помощью функций $\psi(z)=e^{az}-z$; $\varphi(z)=e^{az}$; $a>0$, получить разложение:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda_n}{a\lambda_n-1}e^{\lambda_n x}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}e^{-\lambda_n\mu}f(\mu)\,d\mu;\quad -\frac{a}{2}<x<\frac{a}{2},$$

где λ_n — корни уравнения $z = e^{az}$.

2448. Доказать равенство при прежних λ_n:

$$e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\lambda_n \operatorname{sh} \frac{a(1-\lambda_n)}{2}}{(a\lambda_n - 1)(1-\lambda_n)} e^{\lambda_n x}.$$

Доказать равенства для сумм следующих рядов аналитических функций:

2449. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(1-z^n)(1-z^{n+1})} = \frac{z}{(1-z)^2}$ при $|z|<1$ и равно $\frac{1}{(1-z)^2}$ при $|z|>1$.

2450. $\frac{1}{1-z} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2^{n-1}}}{z^{2^n}-1} = 1$ при $|z|<1$; или $=0$ при $|z|>1$.

2451. $1 - z + \frac{z(z-1)}{1\cdot 2} - \frac{z(z-1)(z-2)}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots = 0$ при $\operatorname{Re} z > 0$; или $=\infty$ при $\operatorname{Re} z < 0$.

2452. $1 - \frac{z^2}{1} + \frac{z^2(z^2-1)}{2!^2} - \frac{z^2(z^2-1)(z^2-4)}{3!^2} + \ldots = \frac{\sin \pi z}{\pi z}$.

Найти область сходимости следующих рядов:

2453. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(1+z)(1+z^2)\ldots(1+z^n)}$.

2454. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z+n}$.

2455. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\frac{z(z+n)}{n}\right]^n$.

2456. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{1+a^{2n}z^2}$; $|a|>1$.

2457. Доказать, что функция

$$f(z) = \sum_{m,\, n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(m+nz)^2}, \quad m^2+n^2>0,$$

рассматриваемая в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, там регулярна и имеет вещественную ось существенной купюрой.

2458. Доказать, что функция $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{z - e^{2\pi n i \sqrt{2}}}$, регулярная при $|z|<1$, не продолжается за окружность $|z|=1$.

2459. Доказать, что такой же особенностью отличаются ряды:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} z^{2^n}; \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{2^n},$$

если $\sum\limits_0^\infty a_n$ расходится.

2460. Пусть a, b, c — числа, изображаемые тремя вершинами треугольника, а x, y, z — правильные дроби. Ряд:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^m y^n z^p}{\dfrac{ma+nb+pc}{m+n+p} - \zeta}, \quad m+n+p>0,$$

представляет вне треугольника аналитическую функцию ζ, которая не продолжается внутри треугольника. Доказать, что, вопреки сказанному в книге Эрмита «Курс анализа», ряд сходится и внутри треугольника на повсюду плотном множестве точек.

Преобразование Абеля состоит в тождестве:

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu b_\nu = \sum_{\nu=1}^{n-1} s_\nu (b_\nu - b_{\nu+1}) + b_n s_n,$$

где $s_\nu = a_1 + a_2 + \ldots + a_\nu$.

Рядом Дирихле называется ряд вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{n^s}$, где a_n — коэффициент.

Обобщенным рядом Дирихле называется ряд вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{p_n^s}$, где $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ — некоторая бесконечно возрастающая последовательность чисел. Положим еще $s = \sigma + i\tau$. Равенство $u = O(v)$ означает, что отношение $\left|\dfrac{u}{v}\right|$ остается ограниченным при бесконечном возрастании v.

У всякого ряда Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{n^s}$ существует число s_0, такое, что ряд сходится при $s > s_0$ и расходится при $s < s_0$. Оно называется абсциссой сходимости.

Доказать теоремы:

2461. Если общий ряд Дирихле сходится при $\sigma = \sigma_0$, то он сходится при любом s, у которого $\sigma > \sigma_0$.

2462. Если для величины $A_n = \sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu$ имеется равенство $A_n = 0(n^{\sigma_0})$, то ряд Дирихле $\sum \dfrac{a_n}{n^s}$ сходится при $\sigma > \sigma_0$, сходится абсолютно и равномерно при $\sigma > \sigma_0 + 1 + \delta$, где δ — любая положительная постоянная.

2463. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ сходится при $\sigma = \sigma_0$, то $A_n = O(n^{\sigma})$.

2464. Верхний предел бесконечной последовательности чисел v_ν обозначается через $\overline{\lim}\, v_\nu$. Он представляет наибольшую из точек сгущения последовательности v_ν.

Нетрудно доказать теорему Прингсхейма, в силу которой у сходящегося ряда положительных убывающих слагаемых $\sum u_\nu$ должно выполняться условие $nu_n \to 0$ при $n \to \infty$. Пользуясь сказанным, доказать, что абсциссой сходимости общего ряда Дирихле $\sum p_n^{-s}$ является $\overline{\lim} \frac{\ln n}{\ln p_n}$.

§ 8. Производящие функции и специальные полиномы

Функция $\Phi(z, t)$ называется для функций $\varphi_n(z)$ производящей, если

$$\Phi(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(z)\, t^n.$$

Если $\Phi(z, t)$ сравнительно проста, то из ее свойств можно получить ряд свойств функций $\varphi_n(z)$.

Приводим примеры производящих функций для некоторых важных классов полиномов с указанием основных свойств этих полиномов, которые требуется доказать, пользуясь производящими функциями, а также и другими путями.

2465. $t\frac{e^{tz}-1}{e^t-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(z)}{n!} t^n.$

Здесь $\varphi_n(z)$ — полиномы Бернулли, для которых

$$\varphi_n(z+1) - \varphi_n(z) = nz^{n-1}.$$

При целом $z > 0$ имеем

$$\frac{1}{n}\varphi_n(z) = 1^{n-1} + 2^{n-1} + \ldots + (z-1)^{n-1}.$$

2466. $e^{-tz-\frac{t^2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(z)\, t^n.$

Здесь $H_n(z)$ — полиномы Чебышева — Эрмита, главнейшие свойства которых выражаются равенствами:

$$H_n(z) = \frac{1}{n!} e^{\frac{z^2}{2}} \frac{d^n e^{-\frac{z^2}{2}}}{dz^n}; \quad H_n'(z) = -H_{n-1}(z);$$

$$nH_n(z)+zH_{n-1}(z)+H_{n-2}(z)=0; \qquad H_n''(z)-zH_n'(z)+nH_n(z)=0.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} H_n(z)\,H_m(z)\,dz = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n \\ \dfrac{\sqrt{2\pi}}{m!}, & \text{если } m=n. \end{cases}$$

2467. $$\frac{e^{-\frac{zt}{1-t}}}{(1-t)^{a+1}}=\sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(a)}(z)\,t^n.$$

Здесь $L_n^{(a)}(z)$ — обобщенные полиномы Чебышева — Лагерра. Их свойства:

$$L_n^{(a)}(z)=\frac{1}{n!}e^z z^{-a}\frac{d^n z^{n+a}e^{-z}}{dz^n},$$

$$nL_n^{(a)}(z)+(z-2n-a+1)L_{n-1}^{(a)}(z)+(n+a-1)L_{n-2}^{(a)}(z)=0,$$

$$z\left[L_n^{(a)}(z)\right]''+(a+1-z)\left[L_n^{(a)}(z)\right]'+nL_n^{(a)}(z)=0,$$

$$\int_0^{\infty} z^a e^{-z} L_n^{(a)}(z)\,L_m^{(a)}(z)\,dz = \begin{cases} 0 \text{ при } m\neq n \\ \dfrac{\Gamma(a+n+1)}{n!} \text{ при } m=n. \end{cases}$$

При $a=0$ получаются обычные полиномы Лагерра.

2468. $$\frac{2^{\alpha+\beta}}{r}(1-t+r)^{-\alpha}(1+t+r)^{-\beta}=\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{\alpha,\beta}(x)\,t^n;$$

$$r=\sqrt{1-2xt+t^2}.$$

$P_n^{\alpha,\beta}(x)$ — полиномы Якоби. Их свойства:

$$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta P_n^{\alpha,\beta}(x)=\frac{(-1)^n}{2^n\cdot n!}\frac{d^n(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}}{dx^n}.$$

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^\alpha(1+x)^\beta P_n^{\alpha,\beta}(x)\,P_m^{\alpha,\beta}(x)\,dx=0, \text{ если } m\neq n.$$

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\left[P_n^{\alpha,\beta}(x)\right]^2 dx=$$

$$=\frac{2^{\alpha+\beta+1}}{\alpha+\beta+2n+1}\,\frac{\Gamma(\alpha+n+1)\,\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(\alpha+\beta+n+1)};$$

$$(n+1)(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)P_{n+1}^{\alpha,\beta}(x)-$$
$$-\frac{1}{2}(2n+\alpha+\beta+1)\left[(2n+\alpha+\beta+2)(2n+\alpha+\beta)x+\right.$$
$$\left.+(\alpha^2-\beta^2)\right]P_n^{\alpha,\beta}(x)+(n+\alpha)(n+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)P_{n-1}^{\alpha,\beta}(x)=0.$$

$$(1-x^2)y''+[\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x]y'+n(n+\alpha+\beta+1)y=0;$$
$$y=P_n^{\alpha,\beta}(x).$$

2469. $\dfrac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}P_n(x)\,t^n.$

$P_n(x)$ — полиномы Лежандра, которые получаются из полиномов Якоби при $\alpha=\beta=0$.

2470. $\dfrac{4-t^2}{4-4tx+t^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}T_n(x)\,t^n.$

$T_0(x)=1$, $T_n(x)=\dfrac{1}{2^{n-1}}\cos n\arccos x$ $(n=1, 2, \ldots)$ — полиномы Чебышева.

2471. $\dfrac{1}{1-2tx-t^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n(x)\,t^n,$

$$u_n(x)=\frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{n+1}-\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)^{n+1}}{2\sqrt{1+x^2}}.$$

2472. Используя разложение $(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}P_\nu(x)\,t^{-\nu-1}$, доказать для полиномов Лежандра равенство:

$$P_u(\cos\theta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\frac{t^n\,dt}{\sqrt{1-2t\cos\theta+t^2}},$$

где C — замкнутый контур, внутри которого обе особые точки подынтегральной функции.

2472. Из результата предыдущей задачи получить формулу Дирихле — Мелера:

$$P_n(\cos\theta)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\theta\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sqrt{2(\cos t-\cos\theta)}}\,dt.$$

2474. Пользуясь разложением $(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}P_\nu(x)\,t^{-\nu-1}$, получить формулу Лапласа:

$$P_n(z)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\left(z+\sigma\sqrt{z^2-1}\right)^n\frac{d\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}}.$$

2475. Применяя производящую функцию и тождество

$$1-2t\cos\theta+t^2=(1-te^{\theta i})(1-te^{-\theta i}),$$

доказать равенство:

$$P_n(\cos\theta)=\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}\left[2\cos n\theta+\frac{1}{2}\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot 2\cos(n-2)\theta+\right.$$
$$\left.+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{2n(2n-2)}{(2n-1)(2n-3)}\cdot 2\cos(2n-4)\theta+\ldots\right].$$

§ 9. Конформные преобразования

2476. Доказать, что круг $|z|<1$ переходит в себя лишь при отображении, даваемом функцией: $w=e^{i\theta}\cdot\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$, где $|a|<1$.

2477. Найти условия, при которых дробно-линейная функция $w=\frac{az+b}{cz+d}$ переводит круг $|z|<1$ в верхнюю полуплоскость.

2478. Каковы на плоскости z линии постоянного масштаба отображения $w=\frac{az+b}{cz+d}$?

2479. Определить общий вид функций $w=f(z)$, отображающих плоскость z на плоскость w так, что линиями постоянного масштаба являются:

1) прямые $\operatorname{Im} z=\text{const}$;

2) окружности $|z|=\text{const}$.

Найти функции, дающие следующие конформные отображения:

2480. Круга $|z|<1$ на полуплоскость $\operatorname{Im} w<0$ так, чтобы точки 1, i, $-i$ переходили в точки $w=+1$, 0, -1.

2481. Того же круга в себя так, чтобы точки $z=-1$, i, 1 переходили в точки $w=-1$, $\frac{3i+4}{5}$, 1.

2482. Круга $|z-a|\leqslant a$ в круг $|w|\leqslant 1$, так, чтобы точка $z=0$ соответствовала точке $w=1$, а точка $z=b<a$ соответствовала центру: $w=0$.

2483. Двуугольника, ограниченного дугами окружностей, пересекающихся в точках $z=a$, $z=b$ под углом $\frac{\pi}{\alpha}$, на полуплоскость $\operatorname{Im} w>0$ так, чтобы точки $z=a$, $z=b$ переходили в $w=0$, $w=\infty$.

2484. Верхнего полукруга $|z|<1$ на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w>0$ так, чтобы при $z=0$, 1, -1 было $w=0$, 1, -1.

2485. Полукруга $|z|\leqslant 1$; $\operatorname{Re} z\geqslant 0$ на круг $|w|\leqslant 1$ так, чтобы точки $z=1$, i, -1 соответствовали точкам $w=1$, i, -1.

2486. Области $|z-a|\leqslant a\sqrt{2}$; $|z+a|\leqslant a\sqrt{2}$ на круг $|w|\leqslant 1$.

2487. Квадранта $0<\arg z<\frac{\pi}{2}$ на круг $|w|<1$ так, чтобы при $z=1+i$, 0 было бы $w=0$, 1.

2488. Круга $|z|<1$ на плоскость с разрезом вдоль положительной части вещественной оси.

2489. Плоскости с разрезом вдоль всей вещественной оси, кроме отрезка между точками a и b на область $\operatorname{Im} w>0$.

2490. Плоскости с разрезом вдоль отрезка $a < z < b$ на $\operatorname{Im} w < 0$.

2491. Круга $|z| < 1$ с вырезом по отрезку $0 < z < 1$ на полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$.

2492. Полосы $0 < \operatorname{Re} z < a$ на полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$.

2493. Области $|z - a| > a$; $|z - b| < b$, где $0 < a < b$ на полосу

$$0 < \operatorname{Im} w < \pi.$$

2494. Области $0 < a < |z| < b$, $0 < \arg z < \pi$ на прямоугольник.

2495. Области $|z - 3| > 9$; $|z - 8| < 16$ на кольцо между кругами: $\rho < |w| < 1$.

2496. Области $\operatorname{Re} z \geqslant 0$; $|z - a| \geqslant \sqrt{a^2 - b^2}$ на кольцо $\rho \leqslant |w| \leqslant 1$. Считать $a > b > 0$. Найти ρ.

2497. Внутренней области эллипса $4x^2 + 5y^2 = 20$ с разрезом между фокусами на внутренность кольца $1 < |w| < A$ и найти A.

2498. Внешней области параболы $y^2 = 2px$ на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$.

2499. Внутренней части параболы $y^2 = 2px$ на полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$ (отобразить сначала на полуполосу).

2500. Внутренней части гиперболы

$$x^2 \sin^2 \alpha - y^2 \cos^2 \alpha \leqslant \sin^2 2\alpha \text{ на } \operatorname{Im} w > 0.$$

2501. Внутренности правой половины лемнискаты $r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$ на круг $|w| \leqslant 1$.

Следующие задачи связаны с интегралами Кристофеля — Шварца. Полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ может быть отображена в многоугольник с помощью функции

$$w = \mathrm{A} \int_0^z (z - a)^{\alpha - 1} (z - b)^{\beta - 1}, \ldots, (z - l)^{\lambda - 1} \, dz + B,$$

где A и B — постоянные, $\alpha\pi$, $\beta\pi$, ..., $\lambda\pi$ — углы многоугольника, a, b, ..., l — точки на оси Ox.

Та же функция дает отображение внутренности круга $|z| < 1$ на многоугольник с такими же углами, если точки a, b, ..., l лежат на окружности $|z| = 1$. Чтобы многоугольник был замкнутый, должно выполняться условие: $\alpha + \beta + \ldots + \lambda = n - 2$, где n — число величин a, b, ..., l. Если условие не выполнено, то получается отображение на область, расположенную по определенную сторону ломаной.

2502. Доказать, что функция $w = \int_0^z z^{\frac{1}{3} - 1} (1 - z)^{\frac{1}{3} - 1} \, dz$ отображает верхнюю полуплоскость z на равносторонний треугольник со стороной $\frac{\sqrt{3}}{2\pi} \Gamma^3\left(\frac{1}{3}\right)$.

2503. Доказать, что функция $w=\int\limits_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}$ отображает круг $|z|<1$ на квадрат со стороной $\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)$.

2504. Доказать, что функция $w=\int\limits_0^z (1-z^2)^{-\frac{1}{3}}(1+z^2)^{-\frac{2}{3}}\,dz$ отображает внутренность круга $|z|<1$ на площадь ромба с углом $60°$ и со стороной $\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)$.

2505. Доказать, что функция $w=\int\limits_0^z \frac{dz}{(1-z^n)^{\frac{2}{n}}}$ отображает внутренность круга $|z|<1$ на площадь правильного n-угольника, длина стороны которого равна

$$\frac{2}{\pi n}\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right)\sin^2\frac{\pi}{n}.$$

2506. В какую область отображает внутренность круга $|z|<1$ функция

$$w=\int\limits_0^z \frac{(1+z^n)^\lambda}{(1-z^n)^{\frac{2}{n}+\lambda}}\,dz?$$

2507. Проверить, что функция $w=\int\limits_0^z \frac{\sqrt{z}}{1-z^2}\,dz$ отображает верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z>0$ на ломаную полосу. Детализировать соответствие границ.

Найти функции, дающие указанные конформные отображения:

2508. Круга $|z|<1$ на правильную пятиконечную звезду.

2509. Того же круга на внешность правильного n-угольника.

2510. Полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$ на ту же полуплоскость с разрезом между точками $w=0$ и $w=i$.

2511. Полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$ на плоскость с вертикальными разрезами от точек $w=n\pi$ вниз до бесконечности.

2512. Круга $|z|<1$ на круг $|w|<1$ с радиальным разрезом между точками $w=\frac{1}{2}$ и $w=1$.

2513. Плоскости с разрезом по оси Ox от точки $z=1$ до ∞ на круг $|w|<1$.

2514. Отобразить на полуплоскость ломаную (под прямым углом) полосу, причем ширина горизонтальной стороны полосы равна h, а ширина вертикальной части равна H.

2515. Отобразить полосу шириной 1, с надрезом $h < 1$, на полосу той же ширины без надреза.

2516. Бесконечную полосу с уступом по одному краю, имеющую ширину: до уступа H и после уступа h, отобразить на полуплоскость.

§ 10. Принцип максимума модуля

2517. Применяя интеграл Коши к функции $[f(z)]^n$, где n — целое и совершая предельный переход $n \to \infty$, доказать теорему: если $f(z)$ регулярна внутри контура C, а на контуре справедливо неравенство $|f(z)| \leqslant M$, то оно остается в силе и внутри контура.

Доказать теоремы:

2518. Если $f(z)$ регулярна внутри круга $|z| \leqslant R$, причем $|f(z)| < M$, а $f(0) = 0$, то при $|z| < R$ выполняется неравенство $|f(z)| \leqslant \frac{M}{R} \cdot |z|$, в котором равенство хотя бы в одной точке возможно только тогда, когда $f(z)$ имеет вид $f(z) = \frac{M}{R} e^{i\alpha} z$ (лемма Шварца).

2519. Если $f(z)$ регулярна при $r < |z| < R$, то при $r < \rho < R$ имеется равенство:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(\rho e^{\varphi i}\right) \right|^2 d\varphi = \sum |a_n|^2 \rho^{2n},$$

где a_n — коэффициент ряда Лорана.

2520. Если $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ сходится при $|z| < R$ и притом $|f(z)| \leqslant M$, то $\sum |a_n|^2 R^{2n} \leqslant M^2$.

2521. Если равенство $w = \sum_0^{\infty} a_n z^n$ дает отображение круга $|z| < R$ на площадь S, то $S = \pi \sum_0^{\infty} n |a_n|^2 R^{2n}$.

2522. Если $f(z)$ регулярна в круге $|z| < R$ и отлична от постоянной, то функция

$$I(r) = \int_0^{2\pi} |f(re^{\varphi i})|^2 d\varphi$$

возрастает вместе с r при $0 < r < R$.

2523. Из всех функций $f(z)$, регулярных внутри круга $|z|<R$ и удовлетворяющих условию $\int\limits_0^{2\pi}|f(Re^{\varphi i})|^2\,d\varphi=M$, линейная функция дает наименьшую площадь, в какую отображается круг $|z|<R$.

2524. Для функции $f(z)$, регулярной при $r<|z|<R$, величина

$$I(\rho)=\int\limits_0^{2\pi}|f(\rho e^{\varphi i})|^2\,d\varphi=K(\ln\rho)$$

представляет выпуклую функцию $\ln\rho$, т. е. выполняется неравенство (при $m>0$, $n>0$):

$$K\left(\frac{m\ln\rho_1+n\ln\rho_2}{m+n}\right)\leqslant\frac{mK(\ln\rho_1)+nK(\ln\rho_2)}{m+n}.$$

2525. Если $f(z)$, кроме прежних условий, отлично от нуля при $r<|z|<R$, то величина

$$I_\sigma(\rho)=\int\limits_0^{2\pi}|f(\rho e^{\varphi i})|^\sigma\,d\varphi$$

при любом $\sigma>0$ есть тоже выпуклая функция $\ln\rho$.

2526. Показать, что от условия $f(z)\neq 0$ в предыдущей задаче можно освободиться.

2527. Если $f(z)$ регулярна при $|z|<R$, то величина $I_\sigma(\rho)$ возрастает вместе с ρ.

2528. Если $f(z)$ регулярна при $r<|z|<R$, а $M(\rho)$ есть максимум модуля $f(\rho e^{\varphi i})$, то при $r<\rho<R$ величина $M(\rho)$ есть выпуклая функция от $\ln\rho$ (теорема Адамара о трех кругах).

Указание. Полезно рассмотреть функцию $z^n f(z)=F(z)$, подобрав n так, чтобы величины $M(r)$ и $M(R)$ для $F(z)$ были одинаковы.

2529. Если полином $f(z)$ степени n в интервале $-1\leqslant z\leqslant 1$ по модулю не превосходит M, то для любого z справедливо неравенство: $|f(z)|\leqslant M(a+b)^n$, где a и b — полуоси эллипса, проходящего через точку z и имеющего фокусы в точках $z=\pm 1$.

Указание. Положить $z=\frac{1}{2}\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right)$ и применить теорему о модуле к функции $\zeta^{-n}f\left(\frac{\zeta^2+1}{2\zeta}\right)$.

2530. Если при $|z|<1$ функция $f(z)$ регулярна и $|f(z)|<M$, а $f(\alpha)=0$, где $|\alpha|<1$, то при $|z|<1$ имеет место неравенство: $|f(z)|\leqslant M\cdot\left|\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}\right|$.

2531. Если $f(z)$ регулярна при $|z| < 1$; $f(0) \neq 0$, $|f(z)| < M$ и $f(z) = 0$ при $z = z_1, z_2, z_3, \ldots$, то бесконечное произведение $|z_1|$, $|z_2|$, $|z_3| \ldots$ сходится.

Указание. Рассмотреть неравенство

$$|f(z)| \leqslant M \left| \frac{z - z_1}{1 - \bar{z}_1 z} \cdot \frac{z - z_2}{1 - \bar{z}_2 z} \cdots \frac{z - z_n}{1 - \bar{z}_n z} \right|.$$

2532. Если при $|z| < 1$ функция $f(z)$ регулярна и ограничена, а при $a < \varphi < b$ величина $f(re^{\varphi i})$ при $r \to 1$ равномерно стремится к нулю, то $f(z)$ тождественно равна нулю. (Рассмотреть функцию $f(z) \cdot f(\omega z) \ldots f(\omega^{n-1} z)$, где $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$, а n достаточно велико.)

2533. Если $f_n(z)$ при $|z| \leqslant 1$ ограничена при любом n и $\to 0$ при $n \to \infty$ во множестве точек, имеющих точкой сгущения начало, то $f_n(z) \to 0$ при $n \to \infty$ в любой внутренней точке круга.

Указание. Пусть z_1 $z_2, \ldots, z_m$ — точки, в которых $f_n(z) \to 0$, лежащие внутри окружности $|z| < \rho$. Рассматривая формулу

$$f_n(z) = \sum_{\nu=1}^{m} \frac{f_n(z_\nu)}{\omega'(z_\nu)} \cdot \frac{\omega(z)}{z - z_\nu} + \frac{\omega(z)}{2\pi i} \int\limits_{|t|=1} \frac{f_n(t)\, dt}{\omega(t)(t - z)};$$

$$\omega(z) = \prod_{\nu=1}^{m} (z - z_\nu),$$

фиксировать при заданном $\varepsilon > 0$ достаточно малое ρ, потом соответственно большое m и затем устремить n к ∞.

2534. Если $f_n(z)$ регулярны внутри контура C и равномерно ограничены на нем, а внутри контура имеется точка сгущения точек, в которых $f_n(z) \to 0$ при $n \to \infty$, то и в любой точке внутри контура $f_n(z) \to 0$ (теорема Витали).

2535. Если функции $f_n(z)$ регулярны в круге $|z| < 1$, не имеют в нем корней, а по модулю не больше, чем 1, и, кроме того, $f_n(0) \to 0$ при $n \to \infty$, то во всей внутренности круга $|z| < 1$ функции $f_n(z) \to 0$ при $n \to \infty$.

Указание. Воспользоваться интегралом Пуассона для $\ln |f_n(z)|$.

2536. Пусть z_ν — корни целой функции $f(z)$ и

$$0 < |z_1| \leqslant |z_2| \leqslant |z_3| \leqslant \ldots \leqslant |z_{N-1}| \leqslant R < |z_N|,$$

а для функции $f(z)$ справедливо нѐравенство: $|f(z)| < Ce^{|z|^\sigma}$. Доказать, что при $|z| \leqslant 3R$

$$|f(0)| < \left| \frac{f(z)}{\prod\limits_{\nu=1}^{N-1} \left(1 - \frac{z}{z_\nu}\right)} \right| < \frac{Ce^{(3R)^\sigma}}{2^{N-1}}.$$

2537. Доказать, что при тех же условиях ряд $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{|z_\nu|^n}$ сходится при $n > \sigma$.

2538. При тех же условиях доказать разложение в бесконечное произведение Вейерштрасса:

$$f(z) = e^{g(z)} \prod_\nu \varphi_\nu(z),$$

где $g(z)$ — некоторая целая функция, а

$$\varphi_\nu(z) = \left(1 - \frac{z}{z_\nu}\right) e^{\frac{z}{z_\nu} + \frac{z^2}{2z_\nu^2} + \ldots + \frac{z^{n-1}}{(n-1) z_\nu^{n-1}}}.$$

2539. Пусть $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ удовлетворяет в круге $|z| \leqslant R$ условию: $\operatorname{Re} f(z) \leqslant M$, где $M > 0$.

Рассматривая функцию

$$\frac{1}{z} \cdot \frac{f(z) - a_0}{2M - a_0 - [f(z) - a_0]} = \frac{a_1}{2M - a_0} + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots$$

и пользуясь тем, что $|f(z) - a_0| < |2M - f(z)|$, доказать неравенство:

$$|a_1| < \frac{2|M - \operatorname{Re} a_0|}{R}.$$

2540. Рассматривая при тех же условиях функцию

$$F(z) = \frac{1}{nz^n} \sum_{\nu=1}^{n} [f(\omega^\nu z) - a_0],$$

где $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$, доказать неравенство:

$$|a_n| < \frac{2|M - \operatorname{Re} a_0|}{R^n}.$$

2541. При прежнем условии относительно роста $f(z)$ (см. № 2536) доказать, что при $|z| \leqslant 2R$, а следовательно и $|z| \leqslant R$, имеем:

$$|\psi(z)| = \left| \frac{f(z)}{\prod_{\nu=1}^{N} \left(1 - \frac{z}{z_\nu}\right)} \right| < Ce^{(2R)^\sigma},$$

где в произведении $|z_\nu| \leqslant R$.

2542. Пользуясь тем, что $\ln\psi(z)$ — регулярная функция z при $|z|\leqslant R$, доказать, что при $z=0$ величина

$$[\ln f(z)]^{(n)}-\sum_{\nu=1}^{n}[\ln\varphi_\nu(z)]^{(n)}$$

по абсолютному значению меньше, чем $\frac{c}{R^{n-\sigma}}$, где c — соответствующая постоянная.

2543. Доказать теорему Адамара: если $f(z)$ удовлетворяет при любом z условию $|f(z)|<Ce^{|z|^\sigma}$, где $\sigma<n$ и $f(0)\neq 0$, то справедливо разложение Вейерштрасса

$$f(z)=e^{g(z)}\cdot\prod_{1}^{\infty}\varphi_\nu(z),$$

где $g(z)$ — многочлен, степень которого меньше n.

2544. Доказать теорему Каратеодори: если $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n$ регулярна в круге $|z-a|\leqslant R$ и в нем имеет место $\operatorname{Re}f(z)<M$, где $M>0$, то при $|z-a|=r<R$ справедливо неравенство:

$$|f(z)|<|a_0|+\frac{2|M-\operatorname{Re}a_0|\cdot r}{R-r}.$$

2545. Доказать теорему Линделефа: если $|f(z)|\leqslant C$ на краях области $-a<x<a$, а внутри этой области $|f(z)|<e^{\lambda|y|}$, где λ — некоторая постоянная, то и внутри области $|f(z)|\leqslant C$, причем знак равенства во внутренней точке возможен только тогда, когда $f(z)\equiv C$.

Указание. Полезно изучить функцию $f(z)e^{\varepsilon z^2}$ при $\varepsilon<0$.

§ 11. Дифференциальные уравнения при комплексном переменном

Способ Коши для нахождения интегралов линейной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{dx_m}{dt}+\sum_{\nu=1}^{n}a_{m\nu}x_\nu=\varphi_m(t),\quad m=1,2,\ldots,n \tag{*}$$

состоит в следующем:

1) Введя символ $\delta_{\mu\nu}=0$ при $\mu\neq\nu$ и $\delta_{\nu\nu}=1$, решаем уравнения

$$\sum_{\nu=1}^{n}(a_{\mu\nu}+s\delta_{\mu\nu})A_\nu=\xi_\mu;\quad \mu=1,2,\ldots,n; \tag{**}$$

при этом получится:

$$A_\nu = \frac{\sum\limits_{\mu=1}^{n} \Delta_{\mu\nu}(s)\,\xi_\mu}{\Delta(s)},$$

где $\Delta(s)$ — определитель системы (**).

2) Составляем функции

$$\omega_m(s) = \sum_{\mu=1}^{n} \Delta_{\mu\nu}(s)\left[\xi_\mu + \int\limits_0^t \varphi_\mu(\tau)\,e^{-s\tau}\,d\tau\right]e^{st}.$$

Тогда уравнения (*) имеют систему частных интегралов:

$$x_m = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{\omega_m(s)}{\Delta(s)}\,ds, \quad m = 1, 2, \ldots, n.$$

Здесь интегрирование производится в положительном направлении по кругу $|s| = R$, настолько большому, что все корни уравнения $\Delta(s) = 0$ лежат внутри круга.

При $t = 0$ величины x_m обращаются в ξ_m.

Для одного уравнения

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x)$$

правило Коши обращается в такое:

1. Составляем функцию

$$\varphi(s) = \sum_{\nu=0}^{n-1} y_0^{(\nu)}\,\psi_\nu(s),$$

где $\psi_\nu(s) = s^{n-\nu-1} + a_1 s^{n-\nu-2} + \ldots + a_{n-\nu-1}$.

2. Тогда

$$y = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(C)} \frac{\sum\limits_{\nu=0}^{n-1} y_0^{\nu}\psi_\nu(s)\cdot e^{sx} + \int\limits_0^x e^{(x-t)s} f(t)\,dt}{s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n}\,ds.$$

Здесь $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ — значения при $x = 0$, а интегрирование идет по кругу $|s| = R$, внутри которого лежат все корни знаменателя.

Решить по способу Коши уравнения и системы уравнений при данных начальных условиях (заданных, когда аргумент равен нулю).

2546. $y'' - 2y' + y = f(x)$; $y_0 = a$; $y_0' = b$.

2547. $x' - x + y = 0$, $y' + x + z = 0$, $z' + y - z = 0$.

$$x_0 = a,\ y_0 = b,\ z_0 = c.$$

2548. $x' + x + y = e^t$; $y' - x + 3y = e^{-t}$; $x_0 = -y_0 = 1$.

2549. $x' = 4x + 2y + 2z$; $y' + x + z = 0$; $z' + 2x + y = 0$.

$$-x_0 = y_0 = z_0 = 1.$$

2550. $x'' = 3x + 4y$, $y'' + x + y = 0$; $x_0 = y_0' = 1$; $y_0 = x_0' = 0$.

В следующих задачах найти общий интеграл при помощи степенных рядов:

2551. $y'' - xy = 0$. **2552.** $y'' - x^2y = 0$.
2553. $y''' + xy = 0$. **2554.** $y''' + x^3y = 0$.
2555. $(1 - x^2)y'' - 4xy' - 2y = 0$.
2556. $xy'' + y' + y = 0$.
2557. $xy'' + 2y' + xy = 0$.

2558. Доказать, что уравнению $(1 - x^2)y'' - 5xy' - 4y = 0$ удовлетворяют ряды $\sum\limits_0^\infty \frac{(n!)^2}{(2n)!}(2x)^{2n}$ и $\sum\limits_0^\infty \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}$, первый из которых равен $\frac{1}{2}[(\arcsin x)^2]''$.

2559. Доказать, что общий интеграл уравнения

$$(1 - x^2)y'' - (\alpha + \beta + 1)xy' - \alpha\beta y = 0$$

равен $C_1y_1 + C_2y_2$, где

$$y_1 = 1 + \sum_1^\infty \frac{\alpha(\alpha+2)\ldots(\alpha+2n-2)\,\beta(\beta+2)\ldots(\beta+2n-2)}{(2n)!}x^{2n},$$

$$y_2 = \sum_0^\infty \frac{(\alpha+1)(\alpha+3)\ldots(\alpha+2n-1)(\beta+1)(\beta+3)\ldots(\beta+2n-1)}{(2n+1)!}x^{2n+1}.$$

2560. Доказать, что уравнению $x^2y' + (x - 1)y + 1 = 0$, общий интеграл которого

$$y = \frac{C}{x}e^{-\frac{1}{x}} - \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}\int \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}\,dx,$$

формально удовлетворяет ряд $\sum\limits_0^\infty n!x^n$, расходящийся при любом $x \neq 0$.

2561. Найти интеграл уравнения

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0,$$

где $2n$ — нецелое число, в виде ряда по положительным степеням x.

2562. То же для отрицательных степеней x.

2563. Найти общий интеграл уравнения

$$4x(x-1)y'' + 4[(a+2)x - a - 1]y' + (2a+1)y = 0,$$

представив его равенством $y = C_1\varphi(x, a) + C_2x^{-a}\varphi(x, -a)$, где $\varphi(x, a)$ — ряд по степеням x, равный 1 при $x = 0$.

2564. Найти интегралы предыдущего уравнения при $a=0$ в виде рядов, сходящихся в окрестности точки $x=1$ и $x=\infty$.

2565. Найти интеграл уравнения Бесселя

$$x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0,$$

полагая $y=C_1y_1+C_2y_2$, где y_1 и y_2 — обобщенные степенные ряды вида $x^\sigma(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots)$, где σ — некоторая постоянная не обязательно целая. Число n предполагается отличным от целого числа.

2566. Показать, то общий интеграл уравнения Гаусса

$$x(x-1)y''+[(\alpha+\beta+1)x-\gamma]\,y'+\alpha\beta y=0$$

при $|x|<1$ может быть представлен формулой

$$y=C_1F(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ x)+C_2x^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1,\ 2-\gamma;\ x),$$

где через $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ обозначен гипергеометрический ряд:

$$F(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ x)=1+\frac{\alpha}{1}\cdot\frac{\beta}{\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}x^2+\ldots$$

Метод Лапласа интегрирования линейных дифференциальных уравнений состоит в том, что неизвестная функция y представляется в виде контурного интеграла: $y=\int\limits_{(\gamma)}e^{xt}u(t)\,dt$ и разыскиваются функция $u(t)$ и контур интегрирования (γ).

Тогда: $xy=\int\limits_{(\gamma)}e^{xt}u(t)x\,dt=\underset{(\gamma)}{\Delta}(u(t)\,e^{xt})-\int\limits_{(\gamma)}e^{xt}u'(t)\,dt;$

$$y'=\int\limits_{(\gamma)}e^{xt}tu(t)\,dt;$$

$$xy'=\int\limits_{(\gamma)}tu(t)\,e^{xt}x\,dt=\underset{(\gamma)}{\Delta}(tue^{xt})-\int\limits_{(\gamma)}e^{xt}(tu)'\,dt;$$

$$xy''=\int\limits_{(\gamma)}t^2ue^{xt}x\,dt=\underset{(\gamma)}{\Delta}(t^2ue^{xt})-\int\limits_{(\gamma)}e^{xt}(t^2u)'\,dt.$$

Точно так же: $x^2y=\int\limits_{(\gamma)}x^2e^{xt}u\,dt=x\underset{(\gamma)}{\Delta}(ue^{xt})-\int\limits_{(\gamma)}xe^{xt}u'\,dt=x\underset{(\gamma)}{\Delta}(ue^{xt})-$

$-\underset{(\gamma)}{\Delta}(u'e^{xt})+\int\limits_{(\gamma)}e^{xt}u''\,dt$ и т. д.

После подстановки этих выражений в дифференциальное уравнение, объединив все интегралы, требуют обращения в нуль подынтегрального выражения и выбирают контур интегрирования так, чтобы проинтегрированная часть тоже обратилась в нуль. Очевидно, для определения u получится дифференциальное уравнение такого порядка, какой степени относительно x были коэффициенты дифференциального уравнения.

Поэтому этот метод для „обыкновенных уравнений Лапласа" (у которых коэффициенты линейны) приводит для определения u к уравнению первого порядка, какого бы порядка заданное дифференциальное уравнение ни было.

При помощи метода Лапласа проинтегрировать уравнения:

2567. $xy'' + (2n+1)y' + xy = 0$.

2568. $xy'' - (\alpha+\beta)(1+x)y' + \alpha\beta xy = 0$.

2569. $xy'' + 2ay' - q^2xy = 0$; $a > 0$.

2570. Доказать, что при $0 < a < 1$ общий интеграл предыдущего уравнения можно представить формулой:

$$y = \int_0^\pi e^{xq\cos\varphi}\left(A\sin^{2a-1}\varphi + Bx^{1-2a}\sin^{1-2a}\varphi\right)d\varphi.$$

2571. Показать, что уравнение

$$(Ax^2 + Bx + C)y'' + (Dx + E)y' + Fy = 0$$

простой заменой переменных приводится к гипергеометрическому уравнению $x(x-1)y'' + [(\alpha+\beta+1)x - \gamma]y' + \alpha\beta y = 0$.

2572. Пусть $\varphi(x, t) = t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-tx)^{-\alpha}$. Доказать, что каждый из интегралов

$$\int_0^1 \varphi(x, t)\,dt; \quad \gamma > \beta > 0, \quad \alpha < 1;$$

$$\int_0^\infty \varphi(x, t)\,dt; \quad \beta > 0, \quad \alpha+1 > \gamma, \quad \alpha < 1;$$

$$\int_1^\infty \varphi(x, t)\,dt; \quad \alpha+1 > \gamma > \beta; \qquad \int_1^{\frac{1}{x}} \varphi(x, t)\,dt; \quad \gamma > \beta, \quad \alpha < 1;$$

$$\int_0^{\frac{1}{x}} \varphi(x, t)\,dt, \quad \beta > 0, \quad \alpha < 1, \qquad \int_{\frac{1}{x}}^\infty \varphi(x, t)\,dt; \quad \alpha+1 > \gamma, \quad \alpha < 1$$

есть частный интеграл гипергеометрического уравнения (задача 2571).

2573. Доказать, что интеграл уравнения Лежандра

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

можно представить в одной из форм:

$$y=\int_0^1 t^{-\frac{n+1}{2}}(1-t)^{-\frac{n+2}{2}}(x^2-t)^{\frac{n}{2}}\,dt;\quad n>0,$$

$$y=\int_0^1 t^{\frac{n}{2}}(1-t)^{\frac{n-1}{2}}(x^2-t)^{-\frac{n+1}{2}}\,dt;\quad n>-1.$$

Доказать равенства:

2574. $(1+x)^n=F(-n,\ \beta,\ \beta,\ -x)$.

2575. $e^x=\lim\limits_{n\to\infty}F\left(1,\ n,\ 1,\ \frac{x}{n}\right)$.

2576. $\ln(1+x)=xF(1,\ 1,\ 2,\ -x)$.

2577. $\frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x}=F\left(\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2},\ x^2\right)$.

2578. $(1+x)^n+(1-x)^n=2F\left(-\frac{n}{2},\ \frac{1-n}{2},\ \frac{1}{2},\ x^2\right)$.

2579. $\operatorname{ch}x=\lim\limits_{\alpha,\beta\to\infty}F\left(\alpha,\ \beta,\ \frac{1}{2},\ \frac{x^2}{4\alpha\beta}\right)$.

2580. $\cos n\arccos x=F\left(n,\ -n,\ \frac{1}{2},\ \frac{1-x}{2}\right)$.

2581. $J_n(x)=\lim\limits_{\alpha,\beta\to\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n\frac{1}{\Gamma(n+1)}F\left(\alpha,\beta,\ n+1,\ -\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha\beta}}\right)^2\right)$,

где

$J_n(x)$ — функция Бесселя, равная $\sum\limits_0^\infty\frac{(-1)^\nu\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\nu}}{\nu!\,\Gamma(n+2\nu+1)}$.

2582. Обозначая $F\left(\alpha+n,\ \beta+n,\ \gamma+n,\ \frac{1-x}{2}\right)$ через F_n, доказать, что

$$[(1-x)^\gamma(1+x)^{\alpha+\beta-\gamma+1}F_1]'=2\gamma(1-x)^{\gamma-1}(1+x)^{\alpha+\beta-\gamma}F_0.$$

2583. Пользуясь предыдущим, показать, что

$$[(1-x)^{\gamma+n-1}(1+x)^{\alpha+\beta-\gamma+n+1}F_n]^{(n)}=$$
$$=2^n\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)(1-x)^{\gamma-1}(1+x)^{\alpha+\beta}F_0.$$

2584. Полагая $\gamma=\beta+1$, $\beta=-n$, $\alpha=p+q+n+1$ для полинома Якоби

$$Q=F\left(p+q+n+1,\ -n,\ p+1,\ \frac{1-x}{2}\right),$$

доказать равенство:

$$(1-x)^p(1+x)^qQ=\frac{1}{2^n(p+1)\ldots(p+n)}\frac{d^n}{dx^n}[(1-x)^{p+n}(1+x)^{q+n}].$$

2585. В частном случае при $p=q=0$ получить формулу Родрига для полиномов Лежандра:

$$P_n(x)=\frac{(-1)^n}{2^n\cdot n!}\frac{d^n(1-x^2)^n}{dx^n}.$$

2586. Доказать тождество для полиномов Чебышева:

$$T_n(x)=\frac{\cos n\arccos x}{2^{n-1}}=\frac{1}{2^{n-1}}F\left(n,\ -n,\ \frac{1}{2},\ \frac{1-x}{2}\right)=$$

$$=\frac{(-1)^n}{1\cdot 3\ldots(2n-1)}\frac{\sqrt{1-x^2}}{2^{n-1}}\frac{d^n(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}}{dx^n}.$$

Доказать равенства:

2587. $\displaystyle\int_0^x u^{p-1}(1-u)^{q-1}\,du=\frac{x^p}{p}F(1-q,\ p,\ p,+1,\ x).$

2588. $\displaystyle\int_0^x u^{p-1}e^{-u}\,du=\frac{x^p}{p}\lim_{n\to\infty}F\left(1-n,\ p,\ p+1,\ \frac{x}{n}\right).$

2589. $\displaystyle\int_0^1\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}=\frac{\pi}{2}F\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1,\ k^2\right).$

§ 12. Приложения к задачам математической физики

Плоское безвихревое движение несжимаемой идеальной жидкости характеризуется аналитической функцией $w(z)=\varphi(x,\ y)+i\psi(x,\ y)$, где φ — потенциал скоростей, а ψ — функция тока. Проекции скорости на оси координат v_x и v_y равны частным производным $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ и $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$. Поэтому $\frac{dw}{dz}=v_x-iv_y$. Каждая частица жидкости движется по линии тока $\psi(x,\ y)=C$. Разность значений величины ψ в двух точках представляет объем жидкости, протекающей в единицу времени через цилиндр единичной высоты, стенки которого расположены на линии, соединяющей в плоскости xOy данные точки. Любая линия тока, или часть ее, может быть заменена твердой стенкой без нарушения движения жидкости.

Найти линии равного потенциала, линии тока и величину скорости и ее проекции на оси, если движение жидкости определяется комплексным потенциалом $w=\varphi+i\psi$, данным в следующих задачах:

2590. $w=az;\quad a>0.$

2591. $w=iaz;\quad a>0.$

2592. $w=z^2.$

2593. $w=\frac{1}{z}.$

2594. $w=\frac{1}{z^2}.$

2595. $w=\ln z.$

2596. Потенциал скоростей имеет вид:

$$\varphi = \ln|z^2 - a^2| - \ln|z^2 + a^2|.$$

Найти уравнение линий тока и показать, что дуги окружности $|z| = a$ и оси координат вне точек $z = \pm a$, $z = \pm ia$ суть линии тока.

2597. Функция тока имеет вид

$$\psi = \ln(r^4 - 2a^2r^2\cos 2\theta + a^4),$$

где $z = re^{\theta i}$. Найти потенциал скоростей φ.

2598. Функция тока определяется уравнением:

$$\operatorname{th}\frac{\pi x}{a}\cdot \operatorname{tg}\psi = \operatorname{tg}\frac{\pi y}{a}; \quad a > 0.$$

Найти комплексный потенциал w.

2599. Линии тока — окружности $x^2 + y^2 = 2ax$. Найти отношение скоростей в точках $(2a, 0)$ и (a, a).

2600. Такой же вопрос для лемнискаты $r^2 = a^2\cos 2\theta$ и точек $(a, 0)$ и $\left(a\sqrt{\frac{3}{8}}, \frac{a}{\sqrt{8}}\right)$.

Назовем потоком или расходом Q сквозь замкнутый контур C количество жидкости Q, протекающей в единицу времени сквозь цилиндр с высотой единица и с основанием, расположенным по контуру C. Величина Q дается формулой:

$$Q = \int_C v_x dy - v_y dx.$$

Циркуляцией скорости по тому же контуру C называется величина $\Gamma = \int_C v_x dx + v_y dy$. Так как $\Gamma + iQ = \int_C \frac{dw}{dz}\cdot dz$, то Q и Γ удобно находятся с помощью вычетов.

Если $w = \frac{Q}{2\pi}\ln(z - a)$, где Q — вещественно, то в точке a находится сосредоточенный источник мощности Q. Если $w = \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln(z - a)$, где Γ — вещественно, то в точке a находится вихрь интенсивности Γ.

2601. Для источника мощности Q в точке $z = a$ найти линии тока и линии равного потенциала.

2602. Движение жидкости вызывается источником мощности Q, помещенным в точке a. Доказать, что поток сквозь простой замкнутый контур C равен нулю, если точка C вне контура, и равен Q, если точка a внутри контура.

2603. При тех же условиях, что и в предыдущей задаче, доказать, что циркуляция по любому замкнутому контуру равна нулю.

2604. Получить соответствующие задачам 2602 и 2603 результаты для движения, вызванного вихрем интенсивности Γ в точке a.

2605. Движение жидкости создается источником Q и вихрем Γ, помещенными в точке a. Доказать, что линии тока — логарифмические спирали.

2606. Комплексный потенциал $w = \ln \operatorname{sh} \pi z$. Найти величину потока сквозь окружность $2|z| = 3$ и циркуляцию по ней.

2607. Комплексный потенциал $w = 2i \ln(z^2 - a^2)$. Найти циркуляцию по окружностям $|z - a| = a$; $|z + a| = a$.

2608. Комплексный потенциал $w = \ln(z^2 + z^{-2})$. Каковы источники?

2609. Доказать, что вещественная ось есть линия тока, если движение создается источниками мощности Q, помещенными в точках $a \pm bi$.

Если линия тока C делит плоскость на две части, а движение создается источниками и вихрями, то совокупность источников и вихрей по одну сторону линии C называется отражением источников и вихрей по другую сторону той же линии.

2610. Доказать, что отражением в вещественной оси вихря Γ в точке $a + bi$ является вихрь $-\Gamma$ в точке $a - bi$.

2611. В точке a вне круга $|z| \leqslant R$ помещен источник Q. Доказать, что его отражением в окружности являются два источника: источник Q в точке $\frac{R^2}{\bar{a}}$ и источник с мощностью $-Q$ в точке $z = 0$.

2612. Вихрь интенсивности Γ помещен в точке $z = a$ вне круга $|z| \leqslant R$. Доказать, что его отражением в окружности является вихрь $-\Gamma$ в точке $\frac{R^2}{\bar{a}}$.

2613. Найти движение жидкости вне круга $|z| \leqslant 1$, вызываемое источником мощности Q в точке a, где $a > 1$.

2614. Решить задачу, аналогичную предыдущей, для вихря интенсивности Γ.

2615. Найти движение жидкости в области $|z| > 1$, $\operatorname{Im} z > 0$, вызванное вихрем в точке $z = ai$, $a > 1$, с интенсивностью Γ.

2616. Положительные части осей координат непроницаемые линии. В точке $z = 1$ находится источник, расход которого в первый квадрант равен Q. Найти движение жидкости.

2617. Границы области $0 \leqslant y \leqslant x\sqrt{3}$ — непроницаемые линии. Найти движение жидкости, вызванное источником мощности Q, находящимся в точке $z = ae^{\frac{\pi i}{6}}$, $a > 0$.

2618. Первый квадрант ограничен непроницаемыми осями. В точках $z = 1$ и $z = i$ имеются сосредоточенные источники с расходами в первый квадрант соответственно Q и $-Q$. Найти движение жидкости.

2619. Источники мощности $\pm\frac{Q}{a}$ находятся в точках $z=\pm a$, где $a\to 0$ (диполь). Найти предельное движение жидкости.

2620. На окружности, непроницаемой в остальных точках для жидкости, помещены два источника мощности Q и $-Q$. Доказать, что линии тока внутри круга представляют дуги окружностей, проходящих через оба источника.

2621. Два вихря Γ и $-\Gamma$ помещены в двух точках. Доказать, что в движении, вызванном ими, линии тока — окружности.

2622. Движение жидкости вызвано потоком из бесконечности, имеющим скорость, равную a и направленную в отрицательную сторону оси Ox, и источником $Q=1$ в начале координат. Доказать, что жидкость, поступающая из источника, заполняет область внутри кривой $x\operatorname{tg}2\pi ay=y$.

2623. Движение в полуплоскости $y>0$ вызвано источником в точке $z=ai$. Доказать, что линии тока являются гиперболами $x^2-y^2+a^2=Cxy$.

2624. Движение жидкости создано наложением источников в точках $z=0, \pm\pi i, \pm 2\pi i, \ldots$ с мощностью $Q=2\pi$ каждый. Доказать, что скорость движения стремится к единице при удалении от Oy и направлена от этой оси почти перпендикулярно к ней.

2625. В тех же точках, что и в предыдущей задаче, расположены вихри интенсивности Γ. Доказать, что в точках, далеких от оси Oy, скорость по величине близка к $\frac{\Gamma}{2\pi}$, а по направлению почти параллельна оси Oy.

2626. Движение жидкости создано наложением источников с мощностью $Q=2\pi$ в точках $z=0, \pm\pi i, \pm 2\pi i, \ldots$ и течения со скоростью $v>1$, параллельного отрицательному направлению оси Ox. Доказать, что наибольшая абсцисса точек, куда заходит жидкость из источников, равна $\frac{1}{2}\ln\frac{v+1}{v-1}$.

2627. Доказать, что при условиях предыдущей задачи область, заполняемая жидкостью из источника $z=0$, ограничена кривой $\operatorname{cth}x\cdot\operatorname{tg}y=\operatorname{tg}vy$, расстояние между ветвями которой стремится к $\frac{2\pi}{v+1}$ при $x\to-\infty$.

2628. Источник мощности $Q=2\pi$ расположен в точке $z=ai$, где $0<a<\frac{\pi}{2}$. Доказать, что движение, созданное им в полосе $0<y<\frac{\pi}{2}$ с непроницаемыми границами, определяется комплексным потенциалом $w=\ln[\operatorname{sh}(z+ia)\operatorname{sh}(z-ia)]$.

2629. Источник мощности $Q=2\pi$ расположен в точке $z_0=a+bi$, где $a>0$; $0<b<\frac{\pi}{2}$. Доказать, что комплексный потенциал движения, созданного им в области $0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$; $x \geqslant 0$, с непроницаемыми границами дается формулой:

$$w = \ln [\operatorname{sh}(z - z_0) \operatorname{sh}(z + z_0) \operatorname{sh}(z - \bar{z}_0) \operatorname{sh}(z + \bar{z}_0)].$$

2630. Движение жидкости в области $|z| > 1$, вызванное источником мощности Q в точке $a > 1$, характеризуется функцией $w = \frac{Q}{2\pi} \ln\left(z + \frac{1}{z} - a - \frac{1}{a}\right)$. Полагая $Q = 2\pi v\left(a + \frac{1}{a}\right)$ и $a \to \infty$, найти движение при обтекании круга $|z| < 1$ потоком, у которого скорость на бесконечности $v_\infty = v$ и направлена в сторону отрицательной оси Ox.

Если движение жидкости в односвязной области с непроницаемыми границами, определяемое функцией $w(z)$, вызывается вихрем интенсивности Γ, находящимся в данный момент в точке $z = a$, то этот вихрь перемещается со скоростью $\frac{da}{dt} = \left[\frac{dw_1}{dz}\right]_{z=a}$,

где

$$w_1 = w - \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z - a) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y).$$

Траектория вихря дается уравнением

$$\psi(\xi, \eta) = C, \quad \text{где} \quad a = \xi + i\eta,$$

а скорость жидкости на бесконечности предполагается равной нулю.

2631. Вдоль вещественной оси непроницаемая стенка. На расстоянии h от нее помещен вихрь интенсивности Γ. Доказать, что он движется параллельно оси Ox со скоростью $\frac{\Gamma}{4\pi h}$.

2632. Доказать, что вихрь, помещенный в непроницаемую окружность, движется по концентрической окружности.

2633. Движение в области $|z| > 1$, $x > 0$, $y > 0$ вызывается вихрем с интенсивностью Γ, помещенным в точке (ξ, η). Доказать, что траектория вихря определяется уравнением $\xi^{-2} + \eta^{-2} = C$, а проекции скорости вихря выражаются формулами:

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\Gamma\xi^2}{4\pi\eta(\xi^2 + \eta^2)}; \quad \frac{d\eta}{dt} = -\frac{\Gamma\eta^2}{4\pi\xi(\xi^2 + \eta^2)}.$$

2634. Доказать, что комплексный потенциал движения, вызванного бесконечной цепочкой вихрей, каждого с интенсивностью $\Gamma = 2\pi$, помещенных в точках $z = 0, \pm 2\pi, \pm 2\pi, \ldots$, выражается формулой $w(z) = -i \ln \sin z$.

2635. Найти комплексный потенциал движения, вызванного наличием вихрей двух родов:

1) с интенсивностью Γ в точках $l\left(n + \frac{1}{4}\right) + \frac{hi}{2}$,

2) с интенсивностью $-\Gamma$ в точках $l\left(n-\frac{1}{4}\right)-\frac{hi}{2}$.

Здесь $n=0, 1, 2, 3, \ldots$

2636. Найти скорость вихря интенсивности Γ, помещенного между параллельными стенками, на расстоянии h от одной из них, если расстояние между стенками d.

Если в равенстве $w(z)=u(x, y)+iv(x, y)$; $z=x+iy$ ввести новую переменную $\zeta=\xi+i\eta$, положив

$$z=\varphi(\zeta)=p(\xi, \eta)+iq(\xi, \eta),$$

то, обозначив величины $w(z)$, $u(x, y)$, $v(x, y)$, выраженные через ζ, ξ и η, через $w_1(\zeta)$, $u_1(\xi, \eta)$, $v_1(\xi, \eta)$, мы получим $w_1(\zeta)=u_1(\xi, \eta)+iv_1(\xi, \eta)$. После этого область S на плоскости z перейдет в область S_1 на плоскости ζ, а линии тока $v(x, y)=C$ перейдут в линии тока $v_1(\xi, \eta)=C$.

Таким образом, конформное отображение дает возможность по движению в области S, данному функцией $w(z)$, находить движение в области S_1 с помощью функции $w_1(\zeta)$.

2637. Найти движение в области $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$, в которую в точке $(0, 0)$ в единицу времени втекает объем Q.

2638. Вопрос, аналогичный задаче 2637, но жидкость втекает в точке $\left(\frac{\pi}{2}, h\right)$.

2639. Найти комплексный потенциал при симметричном и непрерывном обтекании цилиндра с круглым основанием $|z|=a$, если скорость потока на бесконечности равна v и направлена в сторону отрицательной оси Ox. (Один из путей решения — отобразить область $|z|>a$, $\operatorname{Im} z>0$ на верхнюю полуплоскость нового переменного.)

2640. Найти комплексный потенциал при обтекании тем же потоком, что и в задаче 2639 отрезка между точками $z=\pm i$. Обтекание ищется непрерывное и симметричное.

2641. Функция $w(z)=a\left(z+\frac{R^2}{z}\right)+\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\frac{z}{R}$ дает несимметричное непрерывное обтекание круга $|z|\leqslant R$. Найти v_∞, циркуляцию вдоль по окружности и точки, где скорость равна нулю.

2642. Найти комплексный потенциал при течении жидкости из полуплоскости $y>0$ в полуплоскость $y<0$ сквозь разрез в стенке $y=0$ между точками $z=\pm 1$. Скорость на бесконечности равна нулю.

2643. Найти комплексный потенциал $w(z)$ для непрерывного симметричного обтекания эллиптического цилиндра с сечением $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ потоком, имеющим на бесконечности скорость $v_x=v$; $v_y=0$.

2644. Доказать, что функция $w=i\ln(1+z^{-1})$ дает обтекание жидкостью пространства, ограниченного прямой и кругом, при условии $v_\infty=0$.

2645. Найти комплексный потенциал течения в области, ограниченной кругом $\left|z+\frac{4}{3}\right|<\frac{2}{3}$ и прямой $\operatorname{Im} z=0$ при условиях на бесконечности $v_x=-v$, $v_y=0$.

Плоское электростатическое поле при отсутствии непрерывно распределенных зарядов характеризуется аналитической функцией $w(z)=u(x, y)+iv(x, y)$. При этом

$$i\frac{dw}{dz}=E_x-iE_y,$$

где E_x и E_y — проекции напряженности электростатического поля на оси координат. Уравнение $u(x, y)=C$ дает силовые линии, а $v(x, y)=C$ — эквипотенциальные линии. Внутри и на границе проводника потенциал v должен быть постоянным. Плотность электричества в каком-либо месте контура проводника дается формулой: $\sigma=\frac{1}{4\pi}\left|\frac{dw}{dz}\right|$.

2646. Показать, что функция $w=2iq\ln\frac{R}{z}$ определяет электрическое поле вне кругового цилиндра $|z|=R$, на котором равномерно распределен заряд, равный q для цилиндра единичной высоты.

2647. Найти силовые и потенциальные линии в предыдущей задаче.

2648. Найти потенциал поля между поверхностями двух цилиндров с круглыми основаниями $|z|=1$, $|z-1|=4$, если потенциал на первом равен 1, а на втором — нулю.

2649. На изолированном проводящем цилиндре с круглым сечением $|z-2i|=1$ плотность электричества $\sigma=1$. Как она распределится, если заземлить плоскость, параллельную образующей и пересекающей плоскость xOy по вещественной оси (электростатическая индукция)?

2650. На цилиндре $|z-5|=4$ потенциал равен 1, а на цилиндре $|z+5|=4$ он равен нулю. Найти наибольшую и наименьшую плотности электричества на обоих цилиндрах.

2651. В точке $z=2$ находится точечный заряд δ. Мнимая ось заземлена. Чему равен потенциал в точке $z=1$?

2652. Представив уравнение параболы $y^2=2px$ в параметрическом виде: $x=2pu^2$, $y=2pu$, доказать, что функция w, определяемая равенством $z=2p(w^2+iw)$, дает поле вне параболы, в котором потенциал на самой параболе равен нулю и в котором нет зарядов.

2653. Найти поле вне эллипса $x=a\cos u$, $y=b\sin u$, представляющего одну из эквипотенциальных линий поля.

2654. Потенциал равен v_0 в точках прямой $z=x+ih$ и равен нулю на вещественной оси. Найти функцию $w(z)$, дающую электростатическое поле.

2655. На эллипсе $3x^2+4y^2=12$ потенциал равен единице, а на отрезке между его фокусами он равен нулю. Найти потенциал в точке $z=i$.

2656. Найти наибольшую и наименьшую плотности заряда на эллипсе предыдущей задачи.

2657. На линии $z = x > 1$ потенциал равен v_0, а на линии $z = x < -1$ он равен $-v_0$. Найти функцию $w(z)$, дающую электростатическое поле.

2658. На линии $z = iy$, где $y > 1$, потенциал равен 1, а на вещественной оси равен нулю. Найти плотность распределения электричества на оси Ox.

2659. Потенциал равен π на ломаной, состоящей из линий: $z = x + \pi i$, $x < 0$ и $z = iy$; $y > \pi$. На оси Ox потенциал равен нулю. Найти электростатическое поле в области, ограниченной указанными линиями, пользуясь интегралом Кристоффеля — Шварца.

Если на контуре C находится заряд q и если область вне контура отображается конформно на область вне круга $|\zeta| = 1$ аналитической функцией

$$z = a_1\zeta + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}\zeta^{-n},$$

то поле вне C дается функцией

$$w = 2iq \ln \frac{w_0}{\zeta(z)},$$

где w_0 — некоторая постоянная.

2660. Найти поле вне эллипса $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, на котором распределен заряд q.

2661. Найти поле вне квадрата $-1 < x < 1$, $-1 < y < 1$, на котором распределен заряд q.

Установившееся плоское распределение тепла внутри однородного тела характеризуется аналитической функцией $w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, где $v(x, y)$ — температура в точке (x, y). Уравнение $v(x, y) = C$ дает изотермические линии, а $u(x, y) = C$ — линии тока тепла.

2662. На окружности $|z| = 1$ температура 0°, а на окружности $|z - 1| = \frac{5}{2}$ она 100°. Найти температуру t в кольце между кругами.

2663. На окружности $|z - 5i| = 4$ температура 100°, а на оси Ox она нуль. Найти температуру t в точке $z = i + 1$.

2664. Найти распределение температуры в области $0 < \varphi < \pi$, $r > a$, где $z = re^{\varphi i}$, если температура равна нулю на вещественной оси и единице на полукруге $z = ae^{\varphi i}$, $0 < \varphi < \pi$.

2665. Найти распределение тепла внутри полукруга $|z| < 1$, $0 < \arg z < \pi$, если температура равна нулю на полуокружности и единице на диаметре.

2666. Та же задача, что и 2665 для сектора круга: $0 < \varphi < \alpha$, $0 < r < a$, где $z = re^{\varphi i}$, а температура 0° на радиусах и 1° на дуге круга.

ОТВЕТЫ

(Произвольные постоянные в неопределенных интегралах опущены)

1. $\frac{1}{4}x^4$. **2.** $\frac{2}{3}x\sqrt{x}$. **3.** $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}$. **4.** $\frac{8}{15}x^{\frac{15}{8}}$. **5.** $2\sqrt{x}$. **6.** $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$. **7.** $-\frac{1}{2}x^{-2}$. **8.** $-\frac{2}{\sqrt{x}}$. **9.** $\frac{1}{3}x^3+3x^2-5x$. **10.** $\frac{1}{5}x^5-x^3+\frac{5}{2}x^2$. **11.** $\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{3}x^3$. **12.** $\frac{1}{5}x^5-\frac{2}{3}x^3+x$. **13.** $\frac{1}{2}x^2-3x+4\ln x$. **14.** $\frac{1}{3}x^3+x^2-x+3\ln x$. **15.** $\left(\frac{2}{5}x^2-\frac{2}{3}x+2\right)\sqrt{x}$. **16.** $\left(\frac{2}{5}x^2+\frac{4}{3}x+2\right)\sqrt{x}$. **17.** $-e^{-x}$. **18.** $-\frac{1}{3}e^{-3x}$. **19.** $-\frac{1}{2}\cos 2x$. **20.** $\frac{1}{3}\sin(3x-5)$. **21.** $\ln(x-2)$. **22.** $\frac{1}{3}\ln(3x+2)$. **23.** $\frac{1}{2}x^2+x+3\ln(x-2)$. **24.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}$. **25.** $\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}$. **26.** $\frac{1}{\sqrt{14}}\operatorname{arctg} x\sqrt{\frac{2}{7}}$. **27.** $\arcsin\frac{x}{\sqrt{5}}$. **28.** $\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+\ln(x-1)$. **29.** $\ln\left(x+\sqrt{x^2-6}\right)$. **30.** $\ln\left(x+\sqrt{x^2+7}\right)$. **31.** $-\frac{1}{2(x-2)^2}$. **32.** $\frac{1}{4}\ln(2x-1)-\frac{1}{4(2x-1)}$. **33.** $\frac{1}{3}\operatorname{tg}3x$. **34.** $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. **35.** $-\frac{1}{5}\operatorname{ctg}(5x-2)$. **36.** $-\frac{2}{3}\sqrt{2-3x}$. **37.** $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin x\sqrt{\frac{3}{2}}$. **38.** $\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$. **39.** $2^x:\ln 2$. **40.** $\frac{2}{3}(x-1)\sqrt{x-1}+\frac{2}{3}(x-2)\sqrt{x-2}$. **41.** $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{3}}$. **42.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{2}$. **43.** $\ln\frac{x+2}{x+3}$. **44.** $\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+3}\right)$. **45.** $\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}}$. **46.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(x+\frac{3}{4}+\sqrt{x^2+\frac{3}{2}x}\right)$. **47.** $\arcsin\frac{x-a}{a}$. **48.** $\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{8}\sin 4x$. **49.** $-\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{8}\cos 4x$. **50.** $\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{14}\sin 7x$. **51.** $\frac{1}{4}\sin x+\frac{1}{12}\sin 3x+\frac{1}{28}\sin 7x+\frac{1}{36}\sin 9x$. **52.** $-\frac{1}{8}\cos 2x-\frac{1}{16}\cos 4x+\frac{1}{24}\cos 6x$.

53. $-\frac{6}{5}\cos\frac{5}{12}x-\frac{6}{7}\cos\frac{7}{12}x$. **54.** $\frac{1}{8}\left(2x-\sin 2x-\frac{1}{4}\sin 4x+\frac{1}{3}\sin 6x-\right.$ $\left.-\frac{1}{8}\sin 8x\right)$. **55.** $\frac{1}{8}\left(3x-2\sin 2x+\frac{1}{4}\sin 4x\right)$. **56.** $\frac{1}{8}\left(3x+2\sin 2x+\frac{1}{4}\sin 4x\right)$. **57.** $\frac{1}{128}\left(3x-\sin 4x+\frac{1}{8}\sin 8x\right)$. **58.** $2\sqrt{e^x+1}$. **59.** $\operatorname{arctg} e^x$. **60.** $\frac{1}{2}(\ln x)^2$. **61.** $\ln\ln x$. **62.** $\frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2$. **63.** $\frac{1}{4}\sin^4 x$. **64.** $-\frac{1}{3}\cos^3 x$. **65.** $\frac{1}{2}e^{x^2}$. **66.** $-\frac{1}{2(x^2+1)}$. **67.** $-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. **68.** $\frac{2}{9}(x^3+1)\sqrt{x^3+1}$. **69.** $3\sqrt[3]{\sin x}$. **70.** $\ln\arcsin x$. **71.** $-2\sqrt{2+\cos x}$. **72.** $\ln(\sin^2 x+3)$. **73.** $\frac{2}{3}\operatorname{tg} x\sqrt{\operatorname{tg} x}$. **74.** $-\frac{1}{3\sin^3 x}+\frac{1}{\sin x}$. **75.** $\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{5}}$. **76.** $-\ln\cos x$. **77.** $\operatorname{tg} x-x$. **78.** $\ln(x^2+6x+13)+\frac{5}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{2}$. **79.** $\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$. **80.** $\frac{2}{3}\ln(3x^2+2x+5)+\frac{10\sqrt{14}}{21}\operatorname{arctg}\frac{3x+1}{\sqrt{14}}$. **81.** $-5\sqrt{5-4x-x^2}-$ $-3\arcsin\frac{x+2}{3}$. **82.** $3\sqrt{3+x+x^2}+\frac{1}{2}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{3+x+x^2}\right)$. **83.** $\sqrt{x^2-ax}+\frac{a}{2}\ln\left(x-\frac{a}{2}+\sqrt{x^2-ax}\right)$. **84.** $\sqrt{x^2+x-1}-$ $-\frac{1}{2}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x-1}\right)$. **85.** $-\sqrt{1+x-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}}$. **86.** $-\sqrt{ax-x^2}+\frac{3a}{2}\arcsin\frac{2x-a}{a}$. **87.** $\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}$. **88.** $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. **89.** $2\arcsin\sqrt{\frac{x}{a}}$. **90.** $\frac{1}{2}\left(a^2\arcsin\frac{x}{a}-x\sqrt{a^2-x^2}\right)$. **91.** $\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$. **92.** $\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3$. **93.** $x\sin x+\cos x$. **94.** $x\operatorname{sh} x-\operatorname{ch} x$. **95.** $-x\cos x+\sin x$. **96.** $\frac{1}{2}(x^2+1)\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}x$. **97.** $\frac{1}{6}(2x^3+3x^2-1)\times$ $\times\ln(x+1)-\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{12}x^2+\frac{1}{6}x$. **98.** $-(x^2+2x+2)e^{-x}$. **99.** $-x^2\cos x+$ $+2x\sin x+2\cos x$. **100.** $\frac{1}{2}(x^2-1)\ln(x^2-1)-\frac{1}{2}x^2$. **101.** $x\ln x-x$. **102.** $\frac{1}{2}x^2\left(\ln^2 x-\ln x+\frac{1}{2}\right)$. **103.** $2\ln(x-2)-\ln(x-1)$. **104.** $9\ln(x-3)-$ $-7\ln(x-2)$. **105.** $\frac{1}{4}\ln\frac{x-1}{x+1}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$. **106.** $\frac{1}{3}\ln(x-1)-$ $-\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$. **107.** $3\ln(x-1)-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\operatorname{arctg} x$. **108.** $\frac{1}{x}+\ln(x-1)-\ln x$. **109.** $\frac{1}{a^2+b^2}\left[\ln(x+a)-\frac{1}{2}\ln(x^2+b^2)+\frac{a}{b}\operatorname{arctg}\frac{x}{b}\right]$.

110. $\frac{2}{3}\ln(x+1)-\frac{1}{3}\ln(x-1)+\frac{1}{3}\ln(x-2)-\frac{2}{3}\ln(x+2)$. **111.** $\frac{1}{2}\ln(x-1)-$ $-4\ln(x-2)+\frac{9}{2}\ln(x-3)$. **112.** $\frac{1}{2}\ln(x-1)-2\ln(x-2)+\frac{3}{2}\ln(x-3)$. **113.** $\frac{1}{3}\ln(x+1)-\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$. **114.** $-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{x}+$ $+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\operatorname{arctg}x$. **115.** $\frac{x+3}{2(1-x^2)}+\frac{1}{4}\ln\frac{x^8}{(x+1)^5(x-1)^3}$. **116.** $\frac{1}{4}\ln\frac{x}{x-2}-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{2(x-2)}$. **117.** $\frac{1}{4}\ln\frac{1-x}{1+x}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x$. **118.** $-\frac{1}{3}\ln(x+1)+\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$. **119.** $\ln[(x+1)^4\times$ $\times(x-2)^3(x-1)^2]$. **120.** $\frac{x}{18(x^2+9)}+\frac{1}{54}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}$. **121.** $\frac{1}{10}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+3}-$ $-\frac{3}{5\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{11}}$. **122.** $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$. **123.** $\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}+\frac{1}{4}\ln\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$. **124.** $\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{5}}{2-x^2}$. **125.** $\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}-\frac{1}{4}\ln\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$. **126.** $-\ln x+3\ln(x-1)-$ $-3\ln(x-2)+\ln(x-3)$. **127.** $\ln(x^2-4)-4\ln(x^2-1)+6\ln x$. **128.** $-\frac{1}{2n}\sum_{\nu=0}^{n-1}\cos\beta_\nu\ln(x^2-2x\cos\beta_\nu+1)+\frac{1}{n}\sum_{\nu}^{n-1}\sin\beta_\nu\operatorname{arctg}\frac{x-\cos\beta_\nu}{\sin\beta_\nu}$; где $\beta_\nu=\frac{2\nu+1}{2n}\pi$. **129.** $\frac{x^3}{3}-3x+3\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}$. **130.** $\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{3}x^3+$ $+x+\frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1}$. **131.** $\frac{1}{2}x^2-x+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$. **132.** $\frac{1}{2}x^2+3x-$ $-\ln(x-1)+8\ln(x-2)$. **133.** $\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{\sqrt{2}}\ln\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}-\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}$. **134.** $\frac{1}{2}x^2+6x+\frac{1}{2}\ln(x-1)-16\ln(x-2)+\frac{81}{2}\ln(x-3)$. **135.** $x+\ln(x^2-x+1)+$ $+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$. **136.** $\frac{1}{2}x^2+x+\ln(x-1)-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\operatorname{arctg}x$. **137.** $\frac{1}{3}x^3+2x-\frac{1}{4(x-1)}-\frac{1}{4(x+1)}+\frac{5}{4}\ln\frac{x-1}{x+1}$. **138.** $\frac{x}{4(x^2+1)^2}+$ $+\frac{3x}{8(x^2+1)}+\frac{3}{8}\operatorname{arctg}x$. **139.** $\frac{2x+1}{6(x^2+x+1)^2}+\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}+$ $+\frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$. **140.** $\frac{x}{24(x^2+4)^3}+\frac{5x}{384(x^2+4)^2}+\frac{5x}{1024(x^2+4)}+$ $+\frac{5}{2048}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}$. **141.** $\frac{2x-3}{3(x^2-3x+3)}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-3}{\sqrt{3}}$. **144.** $\frac{-x^3}{4(x^2+3)^2}-$

$-\frac{3x}{8(x^2+3)}+\frac{\sqrt{3}}{8}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}$. **145.** $-\frac{x^5}{6(x^2-5)^3}-\frac{5x^3}{24(x^2-5)^2}-\frac{5x}{16(x^2-5)}+$
$+\frac{\sqrt{5}}{32}\ln\frac{x-\sqrt{5}}{x+\sqrt{5}}$. **146.** $\frac{-x^5}{6(x^2+4)^3}-\frac{5x^3}{24(x^2+4)^2}-\frac{5x}{16(x^2+4)}+\frac{5}{32}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}$.

147. $-\frac{x^3}{4(x^2-3)^2}-\frac{3x}{8(x^2-3)}+\frac{\sqrt{3}}{16}\ln\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}$. **148.** $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x^2$.

149. $\frac{x^4}{32(x^8+4)}+\frac{1}{64}\operatorname{arctg}\frac{x^4}{2}$. **150.** $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}x^4$ **151.** $\frac{x^6}{12(x^{12}+1)}+\frac{1}{12}\operatorname{arctg}x^6$.

152. $\frac{1}{12}\ln\frac{x^3}{x^3+4}$. **153.** $\frac{1}{2}x^2-2\ln(x^2+2)-\frac{2}{x^2+2}$. **154.** $\frac{3}{8}\ln(x^3-8)-\frac{1}{8}\ln x$.

155. $\frac{1}{4}\ln(x^8+1)-\ln x$. **156.** $\frac{1}{6}\ln\frac{x^6}{x^6+1}+\frac{1}{6(x^6+1)}$. **157.** $\frac{1}{12}\ln\frac{x^6-1}{x^6+1}$.

158. $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{3}\ln\frac{(x^2+2)^2}{x+1}+\frac{4\sqrt{2}}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}$. **159.** $\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+$
$+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}$. **160.** $\ln(x^4-x^3+4x^2+3x+5)+\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}$.

161. $\ln(x^4-7x^3+20x^2-27x+15)+4\operatorname{arctg}(x-2)$. **162.** $\frac{x^2+1}{3(x^3+1)}+$
$+\frac{1}{3}\int\frac{x^2+3}{x(x^3+1)}\,dx$. **163.** $-\frac{3x^2+2}{2x(x^2+1)}-\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}$.

164. $-\frac{9x^2+10x+7}{(x+1)(x^2+x+1)}-\int\frac{9x+2}{(x+1)(x^2+x+1)}\,dx$. **165.** $-\frac{x}{x^5+x+1}$.

166. $\frac{1}{162}\left(-t^2+6t-\frac{2}{t}-6\ln t\right)$; $t=\frac{x+1}{x-2}$. **167.** $-\frac{1}{2t^2}+\frac{4}{t}+6\ln t-4t+$
$+\frac{1}{2}t^2$; $t=\frac{x-1}{x}$. **168.** $\frac{1}{128}\left[-\frac{1}{3t^3}+\frac{3}{t^2}-\frac{15}{t}-20\ln t+15t-3t^2+\frac{1}{3}t^3\right]$;
$t=\frac{x-1}{x+1}$. **169.** $\frac{1}{128}\left[-\frac{1}{4t^4}+\frac{2}{t^3}-\frac{15}{2t^2}+\frac{20}{t}+15\ln t-6t+\frac{t^2}{2}\right]$; $t=\frac{x-1}{x+1}$.

170. $\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x^2+3x+2}{x\sqrt{3}}$. **171.** $\ln\frac{x^2+1}{x^2+x+1}$. **172.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x^2+x-1}{2x}$.

173. $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}$. **174.** $\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}$.

175. $\operatorname{arctg}x+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}x^3$. **176.** $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}$.

177. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{6}\operatorname{arctg}x^3+\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x\sqrt{3}+1}{x^2-x\sqrt{3}+1}$. **178.** $C+D=$

$$=\frac{1}{4}\left[\sqrt{2+\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{2-\sqrt{2}}}-\sqrt{2-\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right];\ C-D=$$

$$=\frac{1}{8}\left[\sqrt{2-\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2+\sqrt{2}}+1}{x^2-x\sqrt{2+\sqrt{2}}+1}+\sqrt{2+\sqrt{2}}\ln\frac{x^2-x\sqrt{2-\sqrt{2}}+1}{x^2+x\sqrt{2-\sqrt{2}}+1}\right].$$

179. $u^3+\frac{3}{2}u^2+3u+3\ln(u-1)$; $u^6=2x-1$. **180.** $\frac{2}{9}\frac{3x-2}{\sqrt{3x-1}}$.

181. $\ln\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}-\arcsin x$. **182.** $6\left(\frac{1}{9}u^9+\frac{1}{8}u^8+\frac{1}{7}u^7+\frac{1}{6}u^6+\frac{1}{5}u^5+\frac{1}{4}u^4\right)$; $u^6=x+1$. **183.** $\frac{6}{7}u^7-\frac{3}{2}u^4+6u+\ln\frac{u^2-u+1}{u^2+2u+1}-2\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2u-1}{\sqrt{3}}$; $u^6=x$. **184.** $\frac{6}{5}u^5-\frac{3}{2}u^4+4u^3-6u^2+6u+\frac{3}{2}\ln\frac{u^2+1}{(u+1)^6}+3\,\mathrm{arctg}\,u$; $u^6=x$.

185. $2\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}$. **186.** $\frac{1}{2}\ln\frac{u^2+u+1}{u^2-2u+1}-\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2u+1}{\sqrt{3}}$; $u^3=\frac{x+1}{x-1}$.

187. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}$. **188.** $\frac{3}{16}\cdot\frac{3x-5}{x-1}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$. **189.** $\frac{3}{7}(4u^2+u-3)\sqrt[3]{u+1}$; $u^4=x$. **190.** $\frac{16t^5-10t^2}{3(t^3-1)^2}+\frac{10}{9}\ln\frac{t^2+t+1}{t^2-2t+1}-\frac{20}{3\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2t+1}{\sqrt{3}}$; $t^3=\frac{x+1}{x-1}$.

191. $4\sqrt{\sqrt{x+2}-1}-2\sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{\sqrt{x+2}-1}{2}}$. **192.** $-\frac{3u}{u^2+1}+3\,\mathrm{arctg}\,u$; $u^6=x$. **193.** $-\frac{3}{2\left(\sqrt[3]{x}+1\right)^2}$. **194.** $6\left(\frac{1}{7}u^7-\frac{3}{5}u^5+u^3-u\right)$; $u^2=\sqrt[3]{x}+1$.

195. $\frac{1}{7}u^7+\frac{3}{5}u^5+u^3+u$; $u=\sqrt{x^2-1}$. **196.** $\frac{3}{14}u^7+\frac{3}{4}u^4+\frac{3}{2}u$; $u=\sqrt[3]{x^2-1}$. **197.** $\frac{1}{5}u^5-\frac{2}{3}u^3+u$; $u=\sqrt{1-x^{-2}}$. **198.** $\frac{1}{10}\ln\frac{u^2-2u+1}{u^2+u+1}+\frac{\sqrt{3}}{5}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2u+1}{\sqrt{3}}$; $u^3=1+x^5$. **199.** $\frac{1}{9}u^9-\frac{3}{7}u^7+\frac{3}{5}u^5-\frac{1}{3}u^3$; $u^2=1+x^2$. **200.** $\frac{1}{6}\ln\frac{u^2+u+1}{u^2-2u+1}-\frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2u+1}{\sqrt{3}}$; $u^3=1+x^{-3}$.

201. $\frac{1}{4}\ln\frac{u+1}{u-1}-\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,u$; $u^4=1+x^{-4}$. **202.** $\frac{u}{2(u^3+1)}-\frac{1}{12}\ln\frac{u^2+2u+1}{u^2-u+1}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2u-1}{\sqrt{3}}$; $u^3=x^{-3}-1$. **203.** $\frac{1}{3}\ln(x^3+\sqrt{x^6-1})$.

204. $-\frac{1}{18}\ln\frac{u^2-u+1}{u^2+2u+1}-\frac{1}{3\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2u-1}{\sqrt{3}}$; $u^3=3x^{-3}+4$. **205.** $\frac{1}{4}\ln\frac{u+1}{u-1}-\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,u$; $u^4=2+x^{-4}$. **206.** $\left(\frac{1}{6}x^5-\frac{5}{24}x^3+\frac{5}{15}x\right)\sqrt{x^2+1}-\frac{5}{16}\ln(x+\sqrt{x^2+1})$. **207.** $\left(\frac{1}{8}x^7+\frac{7}{48}x^5+\frac{35}{192}x^3+\frac{35}{128}x\right)\sqrt{x^2-1}+\frac{35}{128}\ln(x+\sqrt{x^2-1})$. **208.** $\left(-\frac{1}{6x^6}+\frac{1}{3x^2}\right)\sqrt{x^4+1}$. **209.** $\frac{x}{5u^5}+\frac{4x}{15u^3}+\frac{8x^3}{u}$; $u=\sqrt{x^2+1}$. **210.** $\frac{xu^5}{6}-\frac{5xu^3}{24}+\frac{15xu}{16}-\frac{5}{16}\ln(x+u)$; $u=\sqrt{x^2-1}$.

211. $\left(\frac{1}{9}x^7-\frac{7}{54}x^4+\frac{14}{81}x\right)u^2-\frac{14}{81}\left[\frac{1}{6}\ln\frac{u^2+xu+x^2}{u^2-2xu+x^2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2u+x}{x\sqrt{3}}\right]$;

$u=\sqrt[3]{x^3+1}$. **212.** $-\frac{1}{4}(2x+9)\sqrt{-x^2+3x-2}+\frac{27}{8}\arcsin(2x-3)$.

213. $-\frac{1}{4}(2x+7)\sqrt{-x^2+x+4}+\frac{31}{8}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{17}}$. **214.** $\frac{1}{6}(2x^2+x+7)\times$
$\times\sqrt{x^2+2x-1}-2\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x-1})$. **215.** $\frac{1}{6}(2x^2-5x+1)\sqrt{x^2+2x+2}+$
$+\frac{5}{2}\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2})$. **216.** $-\frac{1}{8}(2x^3+3x)\sqrt{1-x^2}+\frac{3}{8}\arcsin x$.

217. $\frac{1}{4}x(x^2+1)\sqrt{x^2+2}-\frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+2})$. **218.** $-\arcsin\frac{1}{x}$.

219. $-\ln\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{1+x+x^2}}{x}\right)$. **220.** $\frac{3x-1}{2x^2}\sqrt{2x^2+2x+1}-$
$-\frac{1}{2}\ln\frac{1+x+\sqrt{2x^2+2x+1}}{x}$. **221.** $\frac{x-2}{3(x-1)}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$.

222. $\frac{1}{2}(x-1)\sqrt{x^2+2x-1}+3\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x-1})-$
$-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{x\sqrt{2}+\sqrt{x^2+2x-1}}{x-1}$. **223.** $\frac{7x-8}{7x-7}\sqrt{x^2+2x+4}-$
$-\frac{19}{7\sqrt{7}}\ln\frac{2x+5+\sqrt{7(x^2+2x+4)}}{x-1}+\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+4})$.

224. $-\frac{1}{x-1}\sqrt{x^2+2x+4}-\frac{2}{\sqrt{7}}\ln\frac{2x+5+\sqrt{7(x^2+2x+4)}}{x-1}+$
$+\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+4})$. **225.** $-\frac{\sqrt{x^2+1}}{2(x-1)}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{x+1+\sqrt{2x^2+2}}{x-1}$.

226. $-\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\frac{\sqrt{3(1+x+x^2)}-(x+1)\sqrt{2}}{\sqrt{1-x+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(1-x)\sqrt{2}}$.

227. $2\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2(x^2+x+1)}}{1-x}+\sqrt{2}\ln\frac{x+1+\sqrt{2(x^2+x+1)}}{\sqrt{x^2+1}}$.

228. $2\ln\frac{\sqrt{x^2+2x+4}-1}{\sqrt{x^2+2x+3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2(x^2+2x+4)}}{x+1}$.

229. $\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{4x^2+4x+3}}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{35}}\ln\frac{\sqrt{7(4x^2+4x+3)}-(2x+1)\sqrt{5}}{\sqrt{x^2+x+2}}$.

230. $\frac{5}{6\sqrt{14}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{8(x^2+6x-1)}}{(2-x)\sqrt{7}}-\frac{1}{3\sqrt{7}}\ln\frac{(x+1)\sqrt{7}+\sqrt{x^2+6x-1}}{\sqrt{4+4x+3x^2}}$.

231. $\frac{1}{4\sqrt{7}}\ln\frac{2\sqrt{4-2x+4x^2}-\sqrt{7}(1-x)}{\sqrt{3x^2+2x+3}}+\frac{1}{2\sqrt{14}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{4-2x+4x^2}}{(1+x)\sqrt{14}}$.

232. $\sqrt{(a-x)(x-b)}+\frac{a-b}{2}\arcsin\frac{2x-a-b}{a-b}$. **233.** $\ln(x+\sqrt{1+x^2})+$
$+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2x^2+2}-x}{\sqrt{x^2+2}}$. **234.** $(\sqrt{x}-2)\sqrt{1-x}-\arcsin\sqrt{x}$. **235.** $\frac{1}{2}x^2+$

$+\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2-1})$. **236.** $\ln(x-1)+\ln(x+\sqrt{x^2-1})-$ $-\frac{1}{x-1}-2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$. **237.** $x+2\ln(x-1)+u+\frac{1}{2}\ln\left(x-\frac{1}{2}+u\right)-$ $-\ln(x+1+2u)$; $u=\sqrt{x^2-x+1}$. **238.** $\ln(x+\sqrt{x^2+1})-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

239. $\frac{1}{288}(48x^3+8x^2+14x-37)\sqrt{x^2+x+1}+\frac{1}{64}\ln(2x+1+2\sqrt{x^2+x+1})-$ $-\frac{1}{6}x^4-\frac{1}{9}x^3$. **240.** $\frac{1-\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1}+\ln(1+x+\sqrt{x^2+2x+2})$.

241. $u-\ln(x+1+u)-\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\frac{u+\sqrt{3}}{x+1}-\frac{1}{2\sqrt{7}}\ln\frac{2x+5+u\sqrt{7}}{x-1}$; $u=$ $=\sqrt{x^2+2x+4}$. **242.** $\frac{1}{2}\ln\frac{x+8+4u}{x}-\frac{1}{2\sqrt{6}}\frac{\ln(x+3+\sqrt{6}\cdot u)}{x-1}-$ $-\frac{1}{4}\ln\frac{7-x+4u}{x+1}$; $u=\sqrt{x^2+x+4}$. **243.** $-\frac{1}{2\sqrt{7}}\ln\frac{2x+5+u\sqrt{7}}{x-1}-$ $-\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\frac{u+\sqrt{3}}{x+1}$; $u=\sqrt{x^2+2x+4}$. **244.** $\frac{1}{3\sqrt{3}}\ln\frac{1-x+u\sqrt{3}}{x+2}-$ $-\frac{1}{3\sqrt{6}}\ln\frac{(x+2)\sqrt{6}+3u}{x-1}$; $u=\sqrt{x^2+2x+3}$. **245.** $\ln(x-1+u)-$ $-\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{\sqrt{2}}{x-1}+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{u-x\sqrt{2}}{x+1}$; $u=\sqrt{x^2-2x-1}$. **246.** $\frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}$.

247. $\frac{1}{27}(12u-u^3)$; $u\sqrt{x^2+x+1}=2x+1$. **248.** $-u^{-3}-\frac{4}{9}(x+2)u^{-1}+$ $+\frac{4}{27}(x+2)^3u^{-3}$; $u=\sqrt{x^2+4x+1}$. **249.** $u-\frac{3}{2}\ln(2x+1+2u)+\frac{4}{3}\frac{2x+1}{u}$; $u=\sqrt{x^2+x+1}$. **250.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\arccos\frac{x\sqrt{2}}{x^2+1}$. **251.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{x^4+1}-x\sqrt{2}}{x^2-1}$.

252. $\ln\frac{x^2+1+\sqrt{x^4+3x^2+1}}{x}$. **253.** $\ln\left(u+\frac{3}{2}+\sqrt{u^2+3u}\right)$; $u=x-\frac{1}{x}$.

254. $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{1+x^4}+x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}-x\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+x^4}{2x^2}}$. **255.** $\arcsin\frac{x^2+1}{(x+1)^2}$.

256. $(x^2+x+1)\sqrt[3]{x^3+3x+1}$. **257.** $x^3\sqrt[3]{(x^3+3x+1)^2}$. **258.** $x^4\times$ $\times\sqrt[4]{x^4+4x+1}$. **259.** $x\ln x-x$. **260.** $\frac{1}{20(2x+5)}+\frac{1}{100}\ln x-$ $-\frac{1}{100}\ln(2x+5)-\frac{\ln x}{4(2x+5)^2}$. **261.** $x\ln(x^2+1)-2x+2\operatorname{arctg}x$

262. $\frac{1}{4(x+1)}-\frac{\ln(x-1)}{2(x+1)^2}+\frac{1}{8}\ln\frac{x-1}{x+1}$. **263.** $\ln\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x}-$ $-\frac{\ln(x^2-x+1)}{x}+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$. **264.** $-\frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}-\arcsin\frac{1}{x}$.

265. $x\ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})+\frac{1}{2}(\arcsin x-x)$. **266.** $x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-$ $-\sqrt{1+x^2}$. **267.** $\sqrt{1-x^2}\ln\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}-\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$. **268.** $x\operatorname{arctg}x-$ $-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$. **269.** $\frac{1}{7}x^7\operatorname{arctg}x-\frac{1}{7}\left[\frac{1}{6}x^6-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]$.

270. $\frac{1}{8}x^8\operatorname{arctg}x-\frac{1}{8}\left[\frac{1}{7}x^7-\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{3}x^3-x+\operatorname{arctg}x\right]$. **271.** $x\arcsin x+$ $+\sqrt{1-x^2}$. **272.** $\frac{1}{2}x^2\arcsin x-\frac{1}{4}\arcsin x+\frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}$. **273.** $-\frac{\arcsin x}{x}-$ $-\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$. **274.** $-\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x}$. **278.** $-(x^4+4x^3+$ $+12x^2+24x+24)e^{-x}$. **279.** $(x^5-20x^3+120x)\sin x+(5x^4-60x^2+120)\cos x$.

280. $\left(-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{4}x\right)\cos(2x+3)+\left(\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{8}\right)\sin(2x+3)$. **281.** $(-x^4+$ $+12x^2-24)\cos x+(4x^3-24x)\sin x$. **282.** $\frac{1}{9}(3x^3-9x^2+6x+13)e^{3x}$.

283. $\frac{1}{4}[(2x^2+6x+9)\sin 2x+(2x+3)\cos 2x]$. **284.** $\frac{1}{625}(125x^3-75x^2+30x-6)e^{5x}$.

285. $(-x^3+x^2+5x-2)\cos x+(3x^2-2x-5)\sin x$. **286.** $\ln(e^x+e^{-x})$.

287. $-2\ln\left(e^{-\frac{x}{2}}+\sqrt{1+e^{-x}}\right)$. **288.** $-\ln\left(e^{-x}+\frac{1}{2}+\sqrt{1+e^{-x}+e^{-2x}}\right)$.

289. $-\frac{1}{2}(x^4+2x^2+2)e^{-x^2}$. **290.** $-\frac{1}{2}(x^2+2)e^{-x^2}$. **291.** $\frac{e^x}{1+x}$.

292. $-\frac{x^2+x+1}{x^3}e^{-x}$. **293.** $\frac{x+2}{x^2+x}e^x$. **294.** $\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx+b\sin bx)$.

295. $\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx)$. **296.** $\frac{1}{2}e^x[(x^2-1)\sin x-(x-1)^2\cos x]$.

297. $\frac{1}{2}e^x[(x^2-1)\cos x+(x-1)^2\sin x]$. **298.** $-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x$.

299. $-\frac{1}{5}\cos^5 x+\frac{1}{7}\cos^7 x$. **300.** $\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{3\sin^3 x}$. **301.** $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+2\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x$.

302. $\frac{1}{2}\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}$. **303.** $\frac{3}{8}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)+\frac{3}{8}\frac{\sin x}{\cos^2 x}+\frac{1}{4}\frac{\sin x}{\cos^4 x}$.

304. $\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x-\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{tg}x-x$. **305.** $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x-\ln\sin x$. **306.** $\operatorname{tg}x+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x$;

307. $-\frac{1}{7}u^7+\frac{1}{3}u^9-\frac{3}{11}u^{11}+\frac{1}{13}u^{13}$; $u=\cos x$. **308.** $-\frac{1}{2u^2}-2\ln u+\frac{1}{2}u^2$; $u=\sin x$. **309.** $-\frac{1}{4}\operatorname{ctg}^4 x$. **310.** $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x+\ln\operatorname{tg}x$. **311.** $-8\operatorname{ctg}2x-\frac{8}{3}\operatorname{ctg}^3 2x$.

312. $\frac{1}{6}\sin^5 x\cos x-\frac{1}{24}\sin^3 x\cos x-\frac{1}{16}\sin x\cos x+\frac{1}{16}x$. **313.** $\frac{1}{10}\sin^7 x\cos^3 x+$ $+\frac{3}{80}\sin^7 x\cos x-\frac{1}{160}\sin^5 x\cos x-\frac{1}{128}\sin^3 x\cos x-\frac{3}{256}\sin x\cos x+\frac{3}{256}x$.

314. $-\frac{1}{8}\sin x\cos^7 x+\frac{1}{48}\sin x\cos^5 x+\frac{5}{192}\sin x\cos^3 x+\frac{5}{128}\sin x\cos x+\frac{5}{128}x$.

315. $-\frac{1}{10}\sin^3 x\cos^7 x-\frac{3}{80}\sin x\cos^7 x+\frac{1}{160}\sin x\cos^5 x+\frac{1}{128}\sin x\cos^3 x+$ $+\frac{3}{256}\sin x\cos x+\frac{3x}{256}$. **316.** $-\frac{1}{6}\sin^5 x\cos x-\frac{5}{24}\sin^3 x\cos x-\frac{5}{16}\sin x\cos x+$ $+\frac{5}{16}x$. **317.** $-\frac{1}{8}\sin^7 x\cos x-\frac{7}{48}\sin^5 x\cos x-\frac{35}{192}\sin^3 x\cos x-\frac{35}{128}\sin x\cos x+$ $+\frac{35}{128}x$. **318.** $-\frac{\cos^7 x}{\sin x}-\frac{7}{6}\sin x\cos^5 x-\frac{35}{24}\sin x\cos^3 x-\frac{35}{16}\sin x\cos x-\frac{35}{16}x$.

319. $\frac{\sin^9 x}{3\cos^3 x}-\frac{3\sin^7 x}{\cos x}-\frac{7}{2}\sin^5 x\cos x-\frac{35}{8}\sin^3 x\cos x-\frac{105}{16}\sin x\cos x+$ $+\frac{105}{16}x$. **320.** $-\ln(\sin x+\cos x)$. **321.** $x-\ln(5\cos x+2\sin x)$.

322. $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)$. **323.** $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\operatorname{tg}\frac{x+\varphi}{2}$, где $b=a\operatorname{tg}\varphi$; $a=\sqrt{a^2+b^2}\cos\varphi$. **324.** $\left|2\sin\frac{x}{2}-2\cos\frac{x}{2}\right|$. **325.** $4\sqrt[4]{\operatorname{tg} x}$. **326.** $\frac{2}{5}\operatorname{tg}^2 x\sqrt{\operatorname{tg} x}$.

327. $\frac{1}{4}\ln\frac{u^2+2u+1}{u^2-u+1}+\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2u-1}{\sqrt{3}}$; $u^3=\operatorname{tg}^2 x$. **328.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\sin x+$ $+\cos x-\sqrt{\sin 2x})+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\sin 2x}}{\cos x-\sin x}$. **329.** $\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\ln(\sin x+\cos x)$.

330. $\frac{4}{25}x+\frac{3}{25}\ln(4\cos x+3\sin x)$. **331.** $\frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\frac{b\operatorname{tg} x}{a}$. **332.** $-\frac{1}{8}\operatorname{ctg}^2 x-$ $-\frac{1}{16}\ln\operatorname{tg} x+\frac{1}{32}\ln(4+\operatorname{tg}^2 x)$. **333.** $\frac{1}{2}\operatorname{tg} x+\frac{1}{2}\ln\operatorname{tg} x$. **334.** $\frac{1}{\sqrt{10}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg} x}{\sqrt{10}}$.

335. $-\frac{1}{3(\operatorname{tg}^3 x+1)}$. **336.** $\frac{1}{a\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{a^2-b^2}\operatorname{tg} x}{a}$, если $|a|>|b|$; $\frac{1}{2a\sqrt{b^2-a^2}}\ln\frac{a+\sqrt{b^2-a^2}\operatorname{tg} x}{a-\sqrt{b^2-a^2}\operatorname{tg} x}$, если $|b|>|a|$. **337.** $\sqrt{\operatorname{tg}^2 x-1}-$ $-\ln\left(\operatorname{tg} x+\sqrt{\operatorname{tg}^2 x-1}\right)$. **338.** $\frac{1}{6}\ln\frac{1-\sin 2x}{2+\sin 2x}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg} x+1}{\sqrt{3}}$.

339. $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x)$. **340.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+\sin 2x}{\sqrt{2}-\sin 2x}$. **341.** $\frac{2}{\cos x}$. **342.** $-\cos 2x+$ $+\ln\cos x$. **343.** $-\frac{1}{2}\ln(4-\operatorname{cosec}^2 x)$. **344.** $\frac{1}{8}\ln\operatorname{tg} 2x+\frac{1}{8}\ln\operatorname{tg} x$.

345. $\frac{1}{6}\ln\operatorname{tg} x+\frac{1}{96}\ln(\operatorname{tg}^2 x-3)-\frac{3}{32}\ln(3\operatorname{tg}^2 x-1)$. **346.** $-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x+\operatorname{ctg} x$.

347. $\operatorname{ctg} x-\frac{1}{5}\operatorname{ctg}^5 x$. **348.** $\frac{5}{2}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)-\frac{3\sin x}{2\cos^2 x}$. **349.** $\frac{2}{\sin^2 x}-\frac{1}{4\sin^4 x}$.

350. $-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\sqrt{2}\cos x+\sqrt{\cos 2x}\right)$. **351.** $\frac{1}{2}\ln\left(\sin x+\cos x+\sqrt{\sin 2x}\right)-$ $-\frac{1}{2}\arcsin(\cos x-\sin x)$. **352.** $\arccos\left[\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]$.

353. $\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, если $a>b>0$; $\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\times$ $\times\ln\frac{b+a\cos x+\sqrt{b^2-a^2}\sin x}{a+b\cos x}$, если $b>a>0$. **354.** $(x-1)e^x+\frac{1}{4}e^{2x}-\frac{1}{2}x$. **355.** $-\frac{1}{6}e^{-2x}-\frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(e^{-2x}\sqrt{3})$. **356.** $\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+\sqrt{e^{4x}-1})+$ $+\frac{1}{2}\arcsin e^{-2x}$. **357.** $\sqrt{\frac{1}{2}(e^{2x}+1)}+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(e^{-x}+\sqrt{e^{-2x}+1})$. **358.** $4\sqrt{2}e^{\frac{x}{2}}$. **359.** $\frac{1}{2}\operatorname{cth}\frac{x}{2}-\frac{1}{6}\operatorname{cth}^3\frac{x}{2}$. **360.** $\frac{3}{8\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+\operatorname{th}x}{\sqrt{2}-\operatorname{th}x}-$ $-\frac{\operatorname{th}x}{4(2-\operatorname{th}^2x)}$. **361.** $\operatorname{sh}x+\frac{2}{3}\operatorname{sh}^3x+\frac{1}{5}(\operatorname{sh}^5x+\operatorname{ch}^5x)$. **362.** $\frac{1}{2}\operatorname{th}x+$ $+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{1+\sqrt{2}\operatorname{th}x}{1-\sqrt{2}\operatorname{th}x}$. **363.** $-\frac{1}{2}\ln\operatorname{th}\frac{x}{2}-\frac{\operatorname{ch}x}{2\operatorname{sh}^2x}$. **364.** $-2\sqrt{\operatorname{ch}x}+$ $+\frac{2}{5}\operatorname{ch}^2x\sqrt{\operatorname{ch}x}$. **365.** $\ln\operatorname{ch}x-\frac{1}{2}\operatorname{th}^2x$. **366.** $\frac{1}{48}(2\operatorname{sh}6x+3\operatorname{sh}4x+6\operatorname{sh}2x+12x)$. **367.** $-\frac{1}{2(x-1)}+\frac{5}{4}\ln(x-1)-\frac{1}{4}\ln(x+1)$. **368.** $-\frac{2(x-1)}{x-2}+4\frac{x-2}{x-1}-$ $-\frac{1}{2}\frac{(x-2)^2}{(x-1)^2}-5\ln\frac{x-2}{x-1}$. **369.** $\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{1}{4(x-1)^2}-\frac{9}{4}\frac{1}{x-1}+$ $+\frac{31}{8}\ln(x-1)+\frac{1}{8}\ln(x+1)$. **370.** $\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}\ln(x-a)+\frac{b^2}{(b-a)(b-c)}\ln(x-b)+$ $+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}\ln(x-c)$. **371.** $-\frac{1}{3x}-\frac{2}{9}\ln x+\frac{1}{5}\ln(x+1)+\frac{1}{90}\ln(x^2-x+3)-$ $-\frac{13}{45\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{11}}$. **372.** $\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\frac{x^2-x\sqrt{3}+1}{x^2+x\sqrt{3}+1}$. **373.** $-\frac{x^3}{2(x^2+1)^2}-$ $-\frac{x}{4(x^2+1)}+\frac{1}{4}\operatorname{arctg}x$. **374.** $\frac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{1}{6}\ln\frac{x-1}{x+1}$. **375.** $-\frac{x+2}{2(x^2+2x+2)}-$ $-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x+1)$. **376.** $\frac{1}{4}y^2+2y+3\ln y-\frac{2}{y}-\frac{1}{4y^2}$; $y=x^2-1$. **377.** $\frac{1}{2(x^2+1)}-\frac{1}{2}\ln\frac{x^2+1}{x^2-1}$. **378.** $\frac{1}{2}(x-2a)\sqrt{a^2-x^2}-$ $-\frac{1}{2}a^2\arcsin\frac{x}{a}$. **379.** $\frac{2}{3}(x+5)\sqrt{x-1}-x-4\ln(1+\sqrt{x-1})$. **380.** $2\sqrt{2x+1}+2\sqrt{x}-2(\operatorname{arctg}\sqrt{2x+1}+\operatorname{arctg}\sqrt{x})$. **381.** $\frac{2}{3}(x-2)\sqrt{x+1}+$ $+2\ln(\sqrt{x+1}+1)$. **382.** $-\frac{1}{3}(x^2+5ax+15a^2)\sqrt{2ax-x^2}-5a^3\arcsin\frac{a-x}{a}$. **383.** $\frac{2(2a+bx)}{b^2\sqrt{a+bx}}$. **384.** $\frac{-(a+2bx^2)}{a^2x\sqrt{a+bx^2}}$. **385.** $\frac{1}{4}(2+3x)\sqrt{x-1}+\frac{3}{8}\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}$. **386.** $\frac{3}{\sqrt{2}}\ln\frac{u^2-u\sqrt{2}+1}{u^2+u\sqrt{2}+1}+3\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{u^2-1}{u\sqrt{2}}$; $u=\sqrt[12]{x}$. **387.** $-\frac{2}{3ax}\sqrt{\frac{a+bx^3}{x}}$.

388. $-\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{2x}+\dfrac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+\dfrac{1}{2}\arcsin x$.

389. $\dfrac{3x^2-2-2\sqrt{(1-x^2)^3}}{3x^3}$. **390.** $-2\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$.

391. $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\ln\dfrac{2-x-\sqrt{3}\sqrt{1-x^2}}{2x-1}$. **392.** $\dfrac{x\sqrt{1-x^2}}{4(1+x^2)}+\dfrac{3}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}$.

393. $-\ln\dfrac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}$. **394.** $\dfrac{2bx^2-3a}{15a^2x^5}\sqrt{(a+bx^2)^3}$.

395. $\dfrac{2}{3}\dfrac{(2x+1)\sqrt{x^2-x}}{x^2}$. **396.** $-\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2(x-1)}+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\ln\dfrac{x+1+\sqrt{2(x^2+1)}}{x-1}$.

397. $\dfrac{2x^2-1}{3x^3}\sqrt{1+x^2}$. **398.** $\dfrac{2x}{\sqrt{1+x^3}}$. **399.** $\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{(x+1)^2-3\sqrt{1+x^3}}{(x+1)^2+3\sqrt{1+x^3}}$.

Примечание: $(x+1)^3-(x-2)^3=9(x^2-x+1)$. **400.** $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x^2}{2-x^2+2\sqrt{1-x^2-x^4}}$.

401. $\dfrac{1}{2}\sqrt{1-x^4}-\dfrac{1}{2}\arccos x^2$. **402.** $\ln\dfrac{x^2+a^2+\sqrt{x^4+a^4}}{x}$.

403. $-\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{\sqrt{x^4+1}-x^2}}{x}$. **404.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\dfrac{x-4}{2(x-1)}$. **405.** $x^3\sqrt{1+x^4}$.

406. $\dfrac{1}{k-1}\ln\dfrac{x^k}{x+\sqrt{x^2-a^{2k-2}x^{2k}}}$. **407.** $-\dfrac{x}{\sqrt{x^4+a^4}}$.

408. $\dfrac{1}{2\sin\frac{a}{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x\sin\frac{a}{2}}{1-x^2}$. **409.** $\operatorname{tg}(x-\operatorname{arctg}x)=\dfrac{\sin x-x\cos x}{x\sin x+\cos x}$.

410. $-\operatorname{ctg}(x-\operatorname{arctg}x)=\dfrac{x\sin x+\cos x}{x\cos x-\sin x}$. **411.** $\dfrac{\operatorname{tg}x}{a[a+(ax+b)\operatorname{tg}x]}$.

412. $\ln(x+a\ln x)$. **413.** $-\dfrac{x}{a(x+a\ln x)}$. **414.** $e^x\ln x$. **415.** $\dfrac{e^x}{1+x^2}$.

416. $\dfrac{x-1}{x+1}e^x$. **417.** $(1+x^2)e^{\operatorname{arctg}x}$. **418.** $2(x\sqrt{x}-3x+6\sqrt{x}-6)e^{\sqrt{x}}$.

419. $-\dfrac{x}{2(e^x-1)^2}-\dfrac{1}{2(e^x-1)}-\dfrac{1}{2}\ln(1-e^{-x})$. **420.** $-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\ln\dfrac{\sqrt{2}-1-\sin x}{\sqrt{2}+1+\sin x}$.

421. $-\dfrac{1}{3\sin^3 x}-\dfrac{1}{\sin x}+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}$. **422.** $-\dfrac{1}{2}\operatorname{ctg}x+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}}$.

423. $\dfrac{1}{\cos x}+\ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$. **424.** $\left(\dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3x+\operatorname{tg}x\right)\ln\operatorname{tg}x-\dfrac{1}{9}\operatorname{tg}^3x-\operatorname{tg}x$.

425. $\dfrac{1}{a(1+a^2)}\left[\operatorname{arctg}(a\cos x)+a\ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right]$. **426.** $3x+\cos x-$

$-4\sqrt{2}\operatorname{arctg}\dfrac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{2\sqrt{2}}$. **427.** $\ln\dfrac{\sin x}{\cos x+\sqrt{\cos 2x}}$.

428. $\operatorname{arctg}\sqrt{\cos 2x}-\sqrt{\cos 2x}$. **429.** $\sqrt{2}\ln(u+\sqrt{3+u^2})$, $u=\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$.

430. $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{2\sin x-\cos^2 x}{2\cos x\sqrt{\sin x}}+\frac{1}{8}\ln\frac{2\sin x+\cos^2 x-2\cos x\sqrt{\sin x}}{2\sin x+\cos^2 x+2\cos x\sqrt{\sin x}}$.

431. $(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}\arcsin\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}\sin x}{b}\right)-\frac{a}{2}(2a^2+3b^2)\arcsin\left(\frac{a}{b}\operatorname{tg}x\right)-$
$-\frac{a^2}{2}\frac{\sin x}{\cos^2 x}\sqrt{b^2\cos^2 x-a^2\sin^2 x}$. **432.** $\frac{1}{2}\arcsin\frac{2\sin x-1}{(1-\sin x)\sqrt{2}}+$
$+\frac{1}{2}\arcsin\frac{2\sin x+1}{(1+\sin x)\sqrt{2}}$. **433.** $(x+1)\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}$.

434. $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$. **435.** $\frac{ax-1}{(1+a^2)\sqrt{1+x^2}}e^{a\operatorname{arctg}x}$.

436. $2(\sin x-1)e^{\sin x}$. **437.** $\frac{1}{10}(5-2\sin 2x-\cos 2x)e^x$. **438.** $x\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

439. $(\sqrt{x^2+2x+3}-\sqrt{2})\ln(x+1)+\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+\sqrt{x^2+2x+3})-\sqrt{x^2+2x+3}$.

440. $\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\ln(\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b})-\frac{1}{2}\sqrt{(x-a)(x-b)}$. **441.** $-\frac{\ln(1+2^{-x})}{\ln 2}$.

442. $-\frac{(x+1)\ln 2+1}{(\ln 2)^2}2^{-x}$. **443.** $\frac{\cos x}{\sqrt{\cos 2x}}$. **444.** $\frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}}$.

445. $-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\cos x}{\sqrt[4]{\cos 2x}}-\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[4]{\cos 2x}+\cos x}{\sqrt[4]{\cos 2x}-\cos x}$. **446.** $\frac{1}{n}\sin^n x\cos nx$.

447. $\frac{1}{n}\sin^n x\sin nx$. **448.** $\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}}\operatorname{arctg}\frac{(a-b)\operatorname{tg}\frac{x}{2}+c}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}}$, если $a^2>b^2+c^2$,

или $\frac{1}{\sqrt{b^2+c^2-a^2}}\ln\frac{(a-b)\operatorname{tg}\frac{x}{2}+c-\sqrt{b^2+c^2-a^2}}{(a-b)\operatorname{tg}\frac{x}{2}+c+\sqrt{b^2+c^2-a^2}}$, если $a^2<b^2+c^2$.

449. $-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\operatorname{tg}x}+\sqrt{\operatorname{ctg}x}}{2}$. **450.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}[\sin\ln x-(\sqrt{2}-1)\cos\ln x]\,x^{\sqrt{2}+1}$.

451. $-\varphi-[1+\ln(\cos\varphi+\sqrt{\cos 2\varphi}]\operatorname{ctg}\varphi+\frac{\sqrt{\cos 2\varphi}}{\sin\varphi}$. **452.** $e^x\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

453. $\frac{e^x}{\sin x}$. **454.** $x\cos\alpha+\sin\alpha\ln\sin(x-\alpha)$. **455.** $\frac{a+b}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{3}}-$
$-\frac{a-b}{\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{2}}+\sqrt{1+\sin x\cos x}\right)$. **456.** $\frac{1}{\sin\alpha}\ln(\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}\alpha)$

457. $\sqrt{\frac{2}{a-2b}}\ln\frac{\sqrt{a-2b}\sin\frac{x}{2}+\sqrt{a+2b\cos x}}{\cos\frac{x}{2}}$, если $a>2b$.

458. $\frac{\sqrt{2}}{3}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}+\frac{x}{2}\right)-\frac{2}{3}\operatorname{arctg}(\cos x-\sin x)$. **459.** $-\frac{2\sqrt{2}}{5}\ln\operatorname{tg}\frac{y}{2}+$ $+\frac{2}{5\sqrt{\sqrt{5}-2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}\cos y}{\sqrt{\sqrt{5}-2}}-\frac{1}{5\sqrt{\sqrt{5}+2}}\ln\frac{\sqrt{\sqrt{5}+2}+\sqrt{2}\cos y}{\sqrt{\sqrt{5}+2}-\sqrt{2}\cos y}$, где $y=x-\frac{\pi}{4}$. **460.** $\frac{1}{12}x^2(\cos 3x-9\cos x)-\frac{1}{18}x(\sin 3x-27\sin x)-$ $-\frac{1}{54}(\cos 3x-81\cos x)$. **461.** $\frac{m}{n+m}$. **462.** $\frac{m}{m-n}$. **463.** $\frac{\pi}{4}$. **464.** $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$. **465.** $-\ln 2$. **466.** $\ln 2$ **467.** a. **468.** $\frac{\pi}{2}$. **469.** $\frac{\pi}{2a}$. **470.** Не существует. **471.** Не существует. **474.** $-\frac{5}{216}$. **475.** $\frac{\pi}{9\sqrt{3}}+\frac{1}{9}\ln 2-\frac{1}{6}$. **476.** $-\frac{\pi}{8}$. **477.** $\frac{1}{4}\left(\ln 2-\frac{5}{8}\right)$. **478.** $\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$. **479.** 0, если $|a|<1$; $\frac{\pi}{a}$, если $|a|=1$; $\frac{2\pi}{a}$, если $|a|>1$. **480.** $\frac{\pi}{1+\pi^2}(1+e^{-1})$. **481.** $-\frac{\pi^2}{n}$, если n четное; $\frac{\pi^2}{n}-\frac{4}{n^3}$, если n нечетное. **482.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}[\pi-2\ln(\sqrt{2}+1)]$. **483.** $\frac{2}{1+k^2}\operatorname{ch}\frac{k\pi}{2}$. **484.** $\frac{2}{a}\ln(a+\sqrt{a^2+1})$. **485.** $\frac{7}{9}$. **493.** $2\pi^2n^2l^2\sigma$. **494.** $\frac{\delta l^4}{2E}$. **495.** 0,08 *кГм*. **496.** $\frac{1}{6}ah^2$. **497.** $\frac{2}{3}a^3$. **498.** 240π *кГм*. **499.** На одной четверти высоты, считая от основания. **500.** На расстоянии $\frac{3}{8}R$ от центра. **501.** $135\pi\ln 2$ *кГм*. **502.** $x=e^{10}$. **503.** $\frac{e_1}{R}$. **504.** mgR. **505.** $\frac{1}{2}ca^2\left(t+\frac{1}{2b}\sin 2bt\right)$. **506.** $\frac{s}{\sigma}\sqrt{\frac{2h}{g}}$. **507.** $\frac{s}{5\sigma}\sqrt{\frac{2h}{g}}$. **508.** $\pi^3n^2\delta hr^4$. **509.** $\frac{18a}{\pi}\ln\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\varphi^\circ}{2}\right)$. **515.** $\frac{1}{3}$. **516.** $3\pi a^2$. **517.** $\frac{3}{2}\pi a^2$. **518.** π. **519.** $\frac{3}{8}\pi a^2$. **520.** $\pi\sqrt{2}$. **521.** $\frac{3}{2}a^2$. **522.** a^2. **523.** $\frac{\pi}{2}(a^2+b^2)$. **524.** $\frac{1}{4}\pi a^2$. **525.** $\left(2\pi+\frac{16}{3}\right)p^2$. **526.** $\frac{88\sqrt{2}}{15}p^2$. **527.** $\frac{16p^2}{3|\sin^3 2\omega|}$, где ω — угол нормали с Ox. **528.** В точке, где $\omega=45^\circ$. **529.** $\frac{1}{6}(40-3\pi)a^2=5{,}09587a^2$. **530.** $12a^2$. **531.** $\frac{1}{2}\pi b^2$. **532.** $a^2[(2k-3)t'+(3-k)\sin t']$ и $a^2[(3-2k)(\pi-t')+(3-k)\sin t']$, где $t'=\arccos(1-k)$. **533.** $a^2(1+k\cos t'-2k^2)t'$, где t' корень уравнения

$\sin t = kt$. При $k=\frac{2}{\pi}$, $S=a^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\right)=0{,}2976a^2$. При $k=\frac{3}{5\pi}$, $S=\frac{5}{6}\pi a^2\left(1-\frac{3\sqrt{3}}{10\pi}-\frac{18}{25\pi^2}\right)=1{,}9940a^2$. **534.** $\frac{1}{2}a^2(4-\pi)$.

535. $4\,\mathrm{arctg}\,2-2\ln 2$. **536.** 0,1. **537.** $\frac{5}{3}\sqrt{2}$. **538.** $\frac{1}{6}ab$.

539. $\left(5\arcsin\frac{3}{5}-4\ln 2\right)a^2$. **540.** $\left(8\ln 2-\frac{5}{3}\right)a^2$. **541.** $\frac{\pi a^2}{4}\left(1-\frac{\pi^2}{12}\right)$.

542. $ab\arcsin\frac{a-b}{a+b}$ (одна луночка). **543.** $4ab\,\mathrm{arctg}\,\frac{b}{a}$. **545.** $\frac{1}{4}\pi a^2$.

546. $\frac{1}{8}\pi a^2$ (одна петля). **547.** Площадь одной петли $\frac{1}{12}\pi a^2$.

548. Площадь одной петли $\frac{1}{16}\pi a^2$. **549.** $\frac{a^2}{12}(2\pi+3\sqrt{3})$.

550. $\frac{p^2}{1-e^2}\left[\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi_0}{2}\right)-\frac{e\sin\varphi_0}{1+e\cos\varphi_0}\right]$.

551. $\frac{p^2}{e^2-1}\left[\frac{e\sin\varphi_0}{2(1+e\cos\varphi_0)}-\frac{1}{\sqrt{e^2-1}}\ln\frac{\sqrt{e+1}\cos\frac{\varphi_0}{2}+\sqrt{e-1}\sin\frac{\varphi_0}{2}}{\sqrt{1+e\cos\varphi_0}}\right]$.

552. $\frac{a^2}{2}\ln\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\varphi_0\right)$. **553.** $\frac{1}{6}a^2\omega^3$. **554.** $\frac{a^2}{4}\left(\mathrm{arctg}\,\omega-\frac{\omega}{1+\omega^2}\right)$.

555. $a\sqrt{b^2-a^2}+2ab\frac{a}{b+\sqrt{b^2-a^2}}+b^2\arccos\frac{a}{b}$. **556.** $\frac{9}{8}a^2\sqrt{3}$.

558. $(2a^2+b^2)\arcsin\frac{a}{b}+3a\sqrt{b^2-a^2}$. **559.** $(\pi+1)a^2$. **560.** $\frac{a^2}{12}(3\sqrt{3}-\pi)$.

561. $\frac{a^2}{4}(5\sqrt{3}-\pi)$; $\frac{a^2}{4}(7\pi-5\sqrt{3})$. **562.** $\frac{1}{4}\pi a^2$. **563.** $\frac{1}{2}\pi a^2$. **564.** 2 : 1.

565. 5 : 4. **566.** $2ab\left[\pi-\mathrm{arctg}\,\frac{2ab}{(a^2-b^2)\sin\alpha}\right]$. **567.** $ab\,\mathrm{arctg}\left(\frac{a^2-b^2}{2ab}\sin\alpha\right)$.

568. $\frac{a^2}{14}$. **569.** $\pi a^2\left(\frac{16}{\sqrt{3}}-9\right)$. **570.** $\frac{1}{4}\ln(2+\sqrt{5})+\frac{1}{2}\sqrt{5}$.

571. $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$. **572.** $a\ln\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{b}{2a}\right)$. **573.** $a\,\mathrm{sh}\,\frac{x_0}{a}$. **574.** $\left(a+\frac{1}{3}x_0\right)\sqrt{\frac{x_0}{a}}$.

575. $2a\ln\frac{a}{a-x_0}-x_0$. **576.** $a\ln\frac{a}{b}$. **577.** $\frac{8p}{27}\left[\left(1+\frac{9y_0}{4p}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right]$.

578. $\left[2(u-2)+\sqrt{3}\ln\frac{u-\sqrt{3}}{u+\sqrt{3}}+2\sqrt{3}\ln(2+\sqrt{3})\right]a$, где $u^2(2a-x_0)=8a-3x_0$

579. $6a$. **580.** $\frac{5}{2}\left[2+\frac{1}{\sqrt{3}}\ln(2+\sqrt{3})\right]a$. **581.** $8a$. **582.** $8a$.

583. $\frac{a}{2}\left[2\pi\sqrt{1+4\pi^2}+\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})\right]$. **584.** $a\frac{\sqrt{1+m^2}}{m}$.

587. $\frac{a}{\sqrt{2}}\ln(1+\sqrt{2})+a$. **588.** $4(a+b)-\frac{4ab}{a+b}$. **589.** $48a$.

592. $t_0\sqrt{a^2+b^2}$. **593.** $\sqrt{3}$. **594.** x_0+z_0. **595.** $x_0+\frac{2}{27}x_0^2$. **596.** x_0+z_0.

597. $a\ln\frac{\sqrt{2a}+\sqrt{x_0}}{\sqrt{2a}-\sqrt{x_0}}$. **598.** $z_0\sqrt{2}$. **599.** $z_0\sqrt{2}$. **600.** $\sqrt{az}+\frac{2}{3}z\sqrt{\frac{z}{a}}$.

601. $a\sqrt{2}\arccos\frac{z}{a}$. **602.** πa^3. **603.** $\frac{1}{2}\pi^2$. **604.** $8\pi a^3\ln\left(1-\frac{b}{2a}\right)-$ $-\pi\left[\frac{1}{3}b^3+ab(4a+b)\right]$. **605.** $\frac{\pi a^3}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(1+\sqrt{2})-\frac{1}{3}\right]$. **606.** $\frac{8}{3}\pi a^3$.

607. $5\pi^2a^3$. **608.** πa^2p. **609.** $\frac{4}{3}\pi ab^2$. **610.** $\frac{\pi b^2}{3a^2}(m-a)^2(m+2a)$.

611. $\pi a^2h\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{h}{b}\right)^2\right]$. **612.** $\frac{1}{6}\pi a^3(9\pi^2-16)$. **613.** $\pi a^3\Big[(2k^2-6k+5)t_0-$ $-\frac{1}{3}(2k^2-13k+15)\sqrt{2k-k^2}\Big]$; $\pi a^3\Big[(2k^2-6k+5)(\pi-t_0)+$ $+\frac{1}{3}(2k^2-13k+15)\sqrt{2k-k^2}\Big]$, где $t_0=\arccos(1-k)$. **614.** $\frac{1}{8}\pi^2a^3$.

615. π^2a^3. **616.** $\frac{3}{8}\pi a^3$. **618.** $2\pi a^3\left(\sin\alpha-\alpha\cos\alpha-\frac{1}{3}\sin^3\alpha\right)$.

619. 1) $\frac{4}{3}\pi a(a^2+b^2)$; 2) $\frac{\pi}{6}\frac{(a+b)^4}{b}$; 3) $\frac{4}{3}\pi a(a^2+b^2)$. **620.** $\frac{2\pi}{75}a^3\sqrt{5}$.

621. $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}a^3$. **622.** $\frac{\pi}{3\sqrt{2}}a^3$. **623.** $\frac{1}{4}\pi^2a^3\sqrt{2}$. **624.** $\frac{2}{3}\pi a^3$. **625.** $\frac{16}{3}$.

626. $\frac{1}{4}\pi a^3$. **627.** $\frac{\pi}{32}$. **628.** $\frac{4}{15}a^2\sqrt{2ap}$. **629.** $\frac{4}{15}a^3$. **630.** $\frac{16}{15}a^2\sqrt{ab}$.

631. $\frac{1}{2}a^2b$. **632.** $\frac{\pi a^3}{4}\left(e^{\frac{2b}{a}}-e^{-\frac{2b}{a}}+4\frac{b}{a}\right)$. **633.** $\frac{1}{3}r^3\operatorname{ctg}\alpha\,[(2+\cos^2\varphi)\sin\varphi-3\varphi\cos\varphi]$.

634. $\frac{1}{6}r^2h\left(\pi-\frac{4}{3}\right)$. **635.** Одна из верхних частей имеет объем $\frac{1}{3}r^2h(1-\cos\varphi)$. Одна из нижних $-\frac{1}{3}r^2h\left(\frac{3}{2}\varphi+\cos\varphi-1\right)$. **636.** $\frac{\pi}{2}abl$. **637.** $8(2-\sqrt{2})r^3$.

638. $\frac{16}{3\sin\alpha}r^3$. **639.** $2\pi[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})]$. **640.** $\pi(\sqrt{u}-\sqrt{2})+$ $+\frac{\pi}{2}\left[\ln\frac{\sqrt{u}-1}{\sqrt{u}+1}+2\ln(1+\sqrt{2})\right]$, где $u=1+\sec^4 a$. **641.** $4\pi^2a^2$.

642. $4\pi^2br$. **643.** $\frac{2}{3}\pi[(2a+p)\sqrt{2ap+p^2}-p^2]$. **644.** $\frac{\pi}{15}\left(\frac{8}{9}p\right)^2\times$ $\times\left[\left(1+\frac{9a}{4p}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{27a}{4p}-2\right)+2\right]$. **645.** $2\pi\left[b^2+ab\frac{\arcsin e}{e}\right]$, где $e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$.

646. $2\pi\left[a^2+\frac{b^2}{2e}\ln\frac{1+e}{1-e}\right]$, где $e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$. **647.** $2\pi ah\left[\sqrt{1+u^2}+\frac{\ln(u+\sqrt{1+u^2})}{u}\right]$, где $u=\frac{h\sqrt{a^2+b^2}}{b^2}$. **648.** $\pi ab\left[\lambda\sqrt{\lambda^2e^2-1}-\frac{b}{a}-\frac{1}{e}\ln\frac{e+\sqrt{\lambda^2e^2-1}}{e+\sqrt{e^2-1}}\right]$, где $e=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$. **649.** $\frac{64}{3}\pi a^2$. **650.** $8\pi\left(\pi-\frac{4}{3}\right)a^2$. **651.** $\frac{12}{5}\pi a^2$. **652.** $4\pi a^2$.

653. $\frac{32}{5}\pi a^2$. **654.** $2\pi a^2(2-\sqrt{2})$. **655.** $2\pi a^2\sqrt{2}$. **656.** $4\pi a^2$.

657. $\frac{16}{3}\pi\left[3k-4+(4-2k)^{\frac{3}{2}}\right]a^2$. При $k=\frac{3}{2}$ поверхность $S_{\min}=8\pi a^2$.

658. $\frac{1}{8}\pi p^2[3\sqrt{2}-\ln(1+\sqrt{2})]$. **659.** $\frac{\pi p^2}{4\sqrt{5}}\left[\frac{7\sqrt{2}-8}{3}+\ln(1+\sqrt{2})\right]$.

660. 1) $4\pi a^2\left[1+\frac{2}{3}\cos^2\alpha-\frac{1}{15}\cos^4\alpha\right]$, где $b=a\cos\alpha$; 2) $\frac{4\pi b^2}{15}\left(24-16\sin^2\beta-\frac{\sin^4\beta}{1+\sin\beta}\right)$, где $a=b\cos\beta$. **661.** $\frac{3\pi\sqrt{2}}{10}a^2$.

662. $2\pi a^2[2\sin\beta-\sin\alpha-(2\beta-\alpha)\cos\beta]$. При $\beta=\frac{1}{2}\alpha$, $S_{\min}=16\pi a^2\sin\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\alpha}{4}$.

663. $\frac{3\pi a^2}{5}(4\sqrt{2}-1)$. **664.** $24(2-\sqrt{2})r^2$. **665.** $\frac{16}{\sin\alpha}r^2$.

666. $\frac{\pi a^2}{12}[4\sqrt{3}+8\sqrt{6}+\ln(1+\sqrt{2})]$. **667.** $\int\limits_{-a}^{a}dy\int\limits_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}}f\,dx$.

668. $\int\limits_0^a dy\int\limits_0^{a-y}f\,dx$. **669.** $\int\limits_0^1\int\limits_y^{2-y}f\,dx\,dy=\int\limits_0^1\int\limits_0^x f\,dy\,dx+\int\limits_1^2\int\limits_0^{2-x}f\,dy\,dx$.

670. $\int\limits_0^a\int\limits_y^{2a+y}f\,dx\,dy=\int\limits_0^a\int\limits_0^x f\,dy\,dx+\int\limits_a^{2a}\int\limits_0^a f\,dy\,dx+\int\limits_{2a}^{3a}\int\limits_{x-2a}^{a}f\,dy\,dx$.

671. $\int\limits_h^{2h}\int\limits_{\frac{ay}{h}}^{4a-\frac{ay}{h}}f\,dx\,dy$. **672.** $\int\limits_0^1\int\limits_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}f\,dy\,dx+\int\limits_1^4\int\limits_{x-2}^{\sqrt{x}}f\,dy\,dx=\int\limits_{-1}^{2}\int\limits_{y^2}^{y+2}f\,dx\,dy$.

673. $\int\limits_0^a\int\limits_x^{2x}f\,dy\,dx+\int\limits_a^{2a}\int\limits_{2x-a}^{x+a}f\,dy\,dx=\left[\int\limits_0^a\int\limits_{\frac{y}{2}}^{y}+\int\limits_a^{2a}\int\limits_{\frac{y}{2}}^{\frac{y+a}{2}}+\int\limits_{2a}^{3a}\int\limits_{y-a}^{\frac{y+a}{2}}\right]f\,dx\,dy$.

674. $\left[\int\limits_{-a\sqrt{3}}^{-a}\int\limits_{-\sqrt{3a^2-y^2}}^{\sqrt{3a^2-y^2}}+\int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{-\sqrt{a^2+y^2}}^{\sqrt{a^2+y^2}}+\int\limits_a^{a\sqrt{3}}\int\limits_{-\sqrt{3a^2-y^2}}^{\sqrt{3a^2-y^2}}\right]f\,dx\,dy$. **675.** $\int\limits_0^1 dy\int\limits_y^1 f\,dx$.

676. $\int\limits_{-1}^{0}\int\limits_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}}f\,dx\,dy$. **677.** $\int\limits_{-1}^{0}\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}}f\,dy\,dx+\int\limits_0^1\int\limits_0^{1-x}f\,dy\,dx$.

678. $\displaystyle\int_0^{\frac{a}{2}} \int_{\sqrt{a^2-2ay}}^{\sqrt{a^2-y^2}} f\,dx\,dy + \int_{\frac{a}{2}}^{a} \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} f\,dx\,dy.$

679. $\displaystyle\left[\int_0^{a} \int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} + \int_0^{a} \int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} + \int_a^{2a} \int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a}\right] f\,dx\,dy.$

680. $\displaystyle\int_0^{2} \int_y^{\sqrt{10y-y^2}} f\,dx\,dy.$

681. $\displaystyle\int_0^{a} \int_{a-x}^{\frac{a^2-x^2}{a}} f(x, y)\,dy\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{a}{\cos\varphi+\sin\varphi}}^{\frac{a}{1+\sin\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi.$

682. $\displaystyle\int_0^{a} \int_{2a-x}^{a+\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y)\,dy\,dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{2a}{\cos\varphi+\sin\varphi}}^{2a\sin\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi.$

683. $\displaystyle\int_0^{2} \int_{2-\sqrt{4-y^2}}^{y} f(x, y)\,dx\,dy = \int_0^{2} \int_x^{\sqrt{4x-x^2}} f(x, y)\,dy\,dx =$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{4\cos\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi.$$

684. $\displaystyle\int_0^{a} \int_{a-y}^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y)\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{a}{\cos\varphi+\sin\varphi}}^{a} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi.$

685. $\displaystyle\int_0^{a} \int_y^{2a-y} f(x, y)\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{2a}{\cos\varphi+\sin\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi.$

686. $\displaystyle\int_{p(1-\sqrt{2})}^{p(1+\sqrt{2})} \int_{\frac{y^2-p^2}{2p}}^{y} f(x, y)\,dx\,dy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \int_0^{\frac{p}{1+\cos\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi.$

687. $\displaystyle\int_{-a}^{a} \int_{\sqrt{2a^2-y^2}}^{a+\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y)\,dx\,dy = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{a\sqrt{2}}^{2a\cos\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi.$

688. $\int\limits_{\frac{\alpha}{1+\alpha}}^{\frac{\beta}{1+\beta}} dv \int\limits_{0}^{\frac{a}{1-v}} f(u-uv,\ uv)\,u\,du.$

689. $\frac{1}{\alpha}\left[\int\limits_{0}^{\frac{b}{a\alpha+b}}\int\limits_{0}^{\frac{a\alpha}{1-v}} + \int\limits_{\frac{b}{a\alpha+b}}^{1}\int\limits_{0}^{\frac{b}{v}}\right] f\left(\frac{u(1-v)}{\alpha};\ uv\right) u\,du\,dv.$

690. $3\int\limits_{0}^{a}\int\limits_{0}^{2\pi} f(r\cos^3\varphi,\ r\sin^3\varphi)\,r\cos^2\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi\,dr.$ **691.** $y=uv;\ x=v.$

692. Перейти к полярным координатам. **693.** $x^2=u;\ y^2=v.$ **694.** $\frac{8}{3}$.

695. $\frac{1}{3}$. **696.** $\frac{3}{20}$. **697.** $\frac{1}{3}$. **698.** $\frac{2}{3}$. **699.** 0. **700.** e^{-1}; $\frac{1}{2}(e^{a^2}-1)$.

701. $\frac{1}{3}$. **702.** $\frac{1}{3}$. **703.** $\frac{2}{3}$. **704.** $\frac{8}{3}$. **705.** $(\pi-1)a^2$. **706.** $\frac{3}{4}a^2(\pi-\sqrt{3})$.

707. a^2. **708.** $\frac{\pi}{2}(a^2+b^2)$. **709.** $\frac{3}{4}\pi a^2$. **710.** $ab+(a^2-b^2)\operatorname{arctg}\frac{a}{b}$.

711. $\frac{1}{6}a^2$. **712.** $\frac{5\pi}{16}a^2$. **713.** $\frac{1}{2}\pi a^2$. **716.** $\frac{\pi}{\sqrt{2}}ab\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right)$. **717.** $\frac{ab}{12}$.

718. $\frac{1}{10}\frac{a^5b}{h^4}$. **719.** $\frac{a^3b^3}{60c^4}$. **720.** $\frac{ab}{6}\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right)$. **721.** $\frac{a^4bk(ak+2bh)}{6h^2(ak+bh)^2}$.

722. $\frac{21\pi}{256}ab\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right)$. **723.** $\frac{ab}{42}\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right)$. **724.** $\frac{ab\sqrt{ab}}{30c}$.

725. $\frac{(a^2-b^2)(\alpha-\beta)}{2(1+\alpha)(1+\beta)}$. **726.** $\frac{2}{3}(\sqrt{a}-\sqrt{b})(m\sqrt{m}-n\sqrt{n})$. **727.** $\frac{55}{64}ab.$

728. $(a^2-b^2)\ln\frac{m}{n}$. **729.** $\frac{1}{6}(m^2-n^2)(\alpha^3-\beta^3)$. **730.** $\frac{1}{2}(a^2-b^2)\ln\frac{\alpha}{\beta}$.

731. $\frac{1}{3}(a-b)(m-n)$. **732.** $\frac{1}{3}(a^2-b^2)\ln\frac{m}{n}$. **733.** $\frac{1}{3}(\sqrt{a}-\sqrt{b})\times$
$\times(\sqrt{m}-\sqrt{n})(a+\sqrt{ab}+b+m+\sqrt{mn}+n)$. **734.** $\frac{c^2}{4}[(v_1-v_0)\times$
$\times(\operatorname{sh}2u_1-\operatorname{sh}2u_0)-(u_1-u_0)(\sin 2v_1-\sin 2v_0)]$. **735.** $\frac{\pi h^2}{|ab_1-a_1b|}$.

736. $\frac{2h^2}{|ab_1-a_1b|}$. **737.** $\frac{64}{3}$. **738.** $\frac{16}{3}$. **739.** $\frac{27}{2}$. **740.** $2\pi a^3$.

741. $\frac{4}{9}ab\sqrt{ab}$. **742.** $\frac{1}{18}a^3$. **743.** πab^2. **744.** $\frac{1}{3}abc$. **745.** $\frac{1}{2}\pi ac^2$.

746. $\frac{\pi}{32}$. **747.** $\frac{88}{105}$. **748.** π. **749.** 2π. **750.** $\frac{3\pi}{32}\frac{a^4}{c}$. **751.** $\pi a^3(\beta-\alpha)$.

752. $\frac{4}{9}\frac{a^3}{\sqrt{\alpha}}$. **753.** $\frac{81}{32}\pi a^3$. **754.** $\frac{a^4}{24c}$. **755.** $\frac{\pi}{8}$.

758. $\frac{1}{3}R^2H\left[\alpha-\sin 2\alpha+\cos^3\alpha\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\right]$. **759.** $\frac{1}{8}v=\frac{1}{4}a^2H(\sqrt{2}+1)\times$ $\times\left[\frac{1}{3\sqrt{2}}-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{24}+\frac{1}{6}\ln\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}\right]$; $v:v_0=\frac{1}{15{,}344\ldots}$.

760. $\frac{3}{4}a^3\left[\frac{2}{3}+\frac{\pi}{6}-\sqrt{3}+\frac{1}{2}\ln 3\right]=\frac{a^3}{177{,}3\ldots}$. **761.** $\frac{3\pi}{2\sqrt{2}}\frac{a^4}{c}$. **762.** $\frac{1}{12}\pi a^3$.

763. $\left(\frac{2}{3}\pi+\frac{40}{9}-\frac{32}{9}\sqrt{2}\right)a^3$. **764.** $\frac{16}{9}a^3$. **765.** $\frac{\pi}{192}$. **766.** $\frac{3}{8}\pi(a+b)$.

769. $\frac{2\pi A}{\sqrt{4ac-b^2}}$. **770.** $\frac{1}{8}\pi ab\left(\frac{a^2}{p}+\frac{b^2}{q}\right)$. **771.** $\frac{a^2b^2}{8c}$. **772.** $\frac{\pi^2}{2}abc$.

773. $\frac{\pi k}{k+1}abc$. **774.** $\frac{4}{9}\frac{a^4bc}{h^3}$. **775.** $\frac{3\pi}{2\sqrt{2}}abc$. **776.** $\frac{\pi}{12}\left(\frac{ab}{c}\right)^3$.

777. $\frac{81}{32}\pi abc$. **778.** $\frac{1}{3}abc$. **779.** $\frac{\pi}{8}abc$. **780.** $\frac{8}{35}$. **781.** $\frac{\pi}{24}$. **782.** $\frac{1}{560}\frac{a^2b^2}{c}$.

783. $\left(\frac{1}{3}-\frac{\pi}{16}\right)abc$. **784.** $\frac{\pi}{2}abc$. **785.** $\frac{\pi}{24}abc$. **786.** $\frac{1}{9}abc$.

787. $\frac{e-1}{e^2}(m-n)a^2$. **788.** $\frac{\alpha^6-\beta^6}{24}\cdot\frac{m^4-n^4}{c}$. **789.** $\frac{7}{3}a^3\ln\frac{3}{2}$. **790.** $\frac{5}{4c}$.

791. $\frac{14}{9}\ln 3$. **792.** $\frac{1}{192}am(a+m)(3a^2-5am+3m^2)$. **793.** $\frac{2}{3}(a+b)\sqrt{2ab}$.

794. $\frac{\alpha-\beta}{3p}\left[(a^2+p^2)^{\frac{3}{2}}-p^3\right]$. **795.** $\frac{4}{3}\sqrt{q}\left[(p+2a)^{\frac{3}{2}}-p^{\frac{3}{2}}\right]$.

796. $4c\left[b+\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arccos\frac{b}{a}\right]$. **797.** $8a^2\arcsin\frac{b}{a}$. **798.** $8a^2$. **799.** $8a^2$.

800. $2\pi a^2$. **801.** $\frac{\pi a^2}{\sqrt{2}}$. **802.** $\frac{1}{6}(u^3-3u+2)+\pi\ln(u+2\pi)$; $u=\sqrt{4\pi^2+1}$.

803. $\frac{\pi}{3c\sin\alpha}\left[(c^2\sin^2\alpha+a^2)^{\frac{3}{2}}-c^3\sin^3\alpha\right]$. **804.** $\frac{a^2}{9}(20-3\pi)$. **805.** $\frac{a^2}{9}(20-3\pi)$.

806. $a^2(2\pi+8-8\sqrt{2})$. **807.** $2\sqrt{2}$. **808.** $\frac{a^2}{\sin\alpha\cos\alpha}$. **809.** $\frac{13}{12}$. **810.** $2a^2$.

811. $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left[3-\sqrt{\frac{3}{2}}+\ln\left(\sqrt{\frac{3}{2}}+1\right)\right]$. **812.** $\frac{2}{3}\pi ab(2\sqrt{2}-1)$.

813. $\frac{4}{3}(2\sqrt{2}-1)ab\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a}{b}}$. **814.** $\frac{ab}{9}(20-3\pi)$. **815.** $\frac{\pi a^2}{2}(\sqrt{2}-1)$.

816. $\frac{a+b}{6}\sqrt{2ab}$. **817.** $\pi\ln(e+e^{-1})$. **818.** $\pi\left[a\sqrt{a^2+h^2}+h^2\ln\frac{a+\sqrt{a^2+h^2}}{h}\right]$.

819. π^2a^2. **820.** $\arcsin\frac{bc}{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}}$. **821.** $\frac{8}{3}$. **822.** 2. **823.** $\frac{1}{2}\pi a^3$.

824. $\frac{1}{2}\pi a^2$. **825.** 0. **827.** πab. **828.** $\frac{1}{2}ab\ln\left(\frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b}\right)$.

829. $\frac{3a^2}{16}\left[t_2-t_1-\frac{1}{4}(\sin 4t_2-\sin 4t_1)\right]$. **830.** $2\pi a^2$. **831.** $2\pi n$, где n — число обходов контура C вокруг начала координат. **832.** $\sum \operatorname{sign} \frac{D(X, Y)}{D(x, y)}$, причем сумма взята по всем точкам пересечения, лежащим внутри контура C. **833.** На биссектрисе, на расстоянии $a\frac{\sin\varphi}{\varphi}$ от центра. **834.** $\frac{4}{5}a$.

835. $\left(\pi a, \frac{4}{3}a\right)$. **836.** $\left(a\frac{\sin m}{m}; a\frac{1-\cos m}{m}; \frac{hm}{2}\right)$. **837.** $\left(\frac{2}{5}; \frac{1}{5}; \frac{1}{2}\right)$.

838. $\left(\frac{1}{3}a; \frac{1}{3}a\right)$. **839.** $\left(\frac{3}{5}x_0; \frac{3}{8}y_0\right)$. **840.** $x_c = y_c = \frac{256a}{315\pi}$.

841. $x_c = y_c = \frac{4a}{3\pi}$. **842.** $x_c = \frac{2}{3}a\frac{\sin\alpha}{\alpha}$. **843.** $\left(\frac{\pi a\sqrt{2}}{8}; 0\right)$. **844.** $x_c = \frac{5}{6}a$.

845. $x_c = y_c = \frac{4\pi a}{9\sqrt{3}}$. **846.** $\left(\pi a; \frac{5}{6}a\right)$. **847.** $\left(\frac{2\sqrt{2}}{3\pi}; \frac{1}{4}\right)$. **848.** $\left(\frac{a}{5}; \frac{a}{5}\right)$.

849. $\left(\frac{3\pi a}{64}; \frac{3\pi b}{64}\right)$. **852.** $\frac{1}{8}a^4(2\varphi - \sin 2\varphi)$; $\frac{a^4}{8}\left(2\varphi + \sin 2\varphi - \frac{32}{9}\frac{\sin^3\varphi}{\varphi}\right)$.

853. $\frac{1}{8}a^4(2\varphi - \sin 2\varphi) - \frac{1}{6}a^4\cos\varphi\sin^3\varphi$. **854.** При $\varphi = \pi$ и когда $8\operatorname{tg}\varphi = 9\varphi$.

855. У равностороннего треугольника. **856.** $\frac{\pi ab^3}{4}$; $\frac{\pi a^3 b}{4}$; $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{4}{\pi a^3 b^3}$.

857. В 12,52 раза. **858.** $\frac{4h_1h_2\left(a_1^2h_2^2 + a_2^2h_1^2\right)}{|a_1b_2 - a_2b_1|^3}$. **859.** $-\frac{4h_1h_2\left(a_1b_1h_2^2 + a_2b_2h_1^2\right)}{|a_1b_2 - a_2b_1|^3}$.

860. $\frac{3\pi}{4\sqrt{2}}$; $\frac{4}{3}$. **861.** $\frac{\mu\pi a^4}{2}$. **862.** $\mu\pi\frac{a^3b^3}{a^2+b^2}$. **863.** $\frac{\mu h^4}{15\sqrt{3}}$.

865. $\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right)$. **866.** $\left(0; 0, \frac{a+h}{2}\right)$. **867.** $x_c = 0$; $y_c = \frac{4}{3\pi}\cdot\frac{u^3 - h^3}{au + h^2\ln\frac{a+u}{h}}$;

$z_c = \frac{\pi}{2}h$; $u^2 = a^2 + h^2$. **868.** $x_c = y_c = \frac{26 - 15\sqrt{2}}{14}$; $z_c = \frac{61\sqrt{2} - 15\ln(1+\sqrt{2})}{96(\sqrt{2}+1)}$.

869. $x_c = \frac{2}{k}y_c = \frac{3[5\sqrt{6} - \ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})]}{8(3\sqrt{3}-1)}c = 0{,}99209c$; $z_c = \frac{6\sqrt{3}}{5(3\sqrt{3}-1)} =$ $= 0{,}37330c$. **870.** $\left(\frac{2a}{3(\pi-2)}; 0; \frac{\pi a}{4(\pi-2)}\right)$. **871.** $\left(0; 0; \frac{a}{\pi(\sqrt{2}-1)}\right)$.

872. $\frac{1}{2}\pi a^3\sqrt{a^2+h^2}$. **873.** $\frac{8}{3}\pi a^4$. **874.** $\frac{4}{15}\pi(1 + 6\sqrt{3})a^4$.

875. $\frac{2}{3}\pi a(a-h)^2(2a+h)$. **876.** $\frac{4}{3}\pi abc\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)$.

877. $\frac{2\pi a}{c(n-2)}[(c-a)^{2-n} - (c+a)^{2+n}]$; $n \neq 2$.

879. $$\int_0^h\int_0^a\int_0^{a-y} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^h\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int^{\frac{a}{\sin\varphi+\cos\varphi}} f\cdot r\,dr\,d\varphi\,dz =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\omega} \int_0^{\frac{h}{\cos\theta}} f\cdot R^2 \sin\theta\, dR\, d\theta\, d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\omega}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{R_1} f\cdot R^2 \sin\theta\, dR\, d\theta\, d\varphi,$$ где

$$\omega = \operatorname{arctg}\frac{a}{h(\cos\varphi+\sin\varphi)};\quad R_1 = \frac{a}{\sin\theta(\cos\varphi+\sin\varphi)}.$$

880. $$\int_0^{a}\int_0^{a-x}\int_0^{a-x-y} f\cdot dz\,dy\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{r_1}\int_0^{a-r(\cos\varphi+\sin\varphi)} f\cdot r\,dz\,dr\,d\varphi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{R_1} f\cdot R^2\sin\theta\,dR\,d\theta\,d\varphi;$$ где $r_1 = \dfrac{a}{\cos\varphi+\sin\varphi}$;

$$R_1 = \frac{a}{\cos\theta+\sin\theta(\cos\varphi+\sin\varphi)}.$$

881. $$\int_{-a}^{a}\int_{-y_1}^{y_1}\int_{\sqrt{x^2+y^2}\operatorname{ctg}\alpha}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} f\cdot dz\,dy\,dx = \int_0^{2\pi}\int_0^{a}\int_{r\operatorname{ctg}\alpha}^{\sqrt{a^2-r^2}} f\cdot r\,dz\,dr\,d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\alpha}\int_0^{a} f\cdot R^2\sin\theta\,dR\,d\theta\,d\varphi;\quad y_1 = \sqrt{a^2\sin^2\alpha - x^2}.$$

882. $$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\sqrt{\frac{a^2}{4}-x^2}}^{\sqrt{\frac{a^2}{4}-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-x^2-y^2}} f\cdot dz\,dy\,dx = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{a}{2}}\int_r^{\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-r^2}} f\cdot r\,dz\,dr\,d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{a\cos\theta} f\cdot R^2\sin\theta\,dR\,d\theta\,d\varphi.$$

883. $$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\sqrt{\frac{a^2}{4}-x^2}}^{\sqrt{\frac{a^2}{4}-x^2}}\int_{\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-x^2-y^2}}^{\sqrt{x^2+y^2}} f\cdot dz\,dy\,dx = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{a}{2}}\int_{\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-r^2}}^{r} f\cdot r\,dz\,dr\,d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a\cos\theta} f\cdot R^2\sin\theta\,dR\,d\theta\,d\varphi.$$

884. $$\int_{-a}^{+a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{+\sqrt{a^2-x^2}}\int_0^{a-x} f\cdot dz\,dy\,dx = \int_0^{2\pi}\int_0^{a}\int_0^{a-r\cos\varphi} f\cdot r\,dz\,dr\,d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\omega}\int_0^{R_1} f\cdot R^2 \sin\theta\, dR\, d\theta\, d\varphi + \int_0^{2\pi}\int_{\omega}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{R_2} f\cdot R^2 \sin\theta\, dR\, d\theta\, d\varphi,$$ где R_1 определяется из уравнения плоскости R_2—из уравнения цилиндра, $\omega = \operatorname{arctg}\frac{1}{1-\cos\varphi}$.

885. $$\int_{-\frac{a}{\sqrt{2}}}^{\frac{a}{\sqrt{2}}}\int_{-\sqrt{a^2-2x^2}}^{\sqrt{a^2-2x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f\cdot dz\,dy\,dx = \int_0^{2\pi}\int_0^{\rho}\int_r^{\sqrt{a^2-r^2\cos^2\varphi}} f\cdot r\,dz\,dr\,d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{R_1} f\cdot R^2\sin\theta\,dR\,d\theta\,d\varphi,$$ где $\rho = \frac{a}{\sqrt{2\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}}$;

$R_1 = \frac{a}{\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta\cos^2\varphi}}$. **886.** $\frac{1}{3}\pi a^3$. **887.** $\frac{a^3}{360}$. **888.** $\frac{\pi a^3}{60}$. **889.** $\frac{\pi^2 a^3}{4}$.

890. $\frac{\pi^2 a^3}{4\sqrt{2}}$. **891.** $\frac{32}{315}a^3$. **892.** $\frac{1}{6}a^3$. **893.** $\frac{\pi a^3}{8}$. **894.** $\frac{4\pi}{9}(a^3+b^3+c^3)$.

895. $\frac{\pi}{3}\left(1-\frac{1}{e}\right)a^3$. **896.** $\frac{2}{3}\pi a^3$. **897.** $\frac{\pi^2 a^3}{6}$. **898.** $\frac{2\pi a^3}{9\sqrt{3}}$. **899.** $\frac{4}{3}\pi a^3$.

900. $\frac{2}{3}\pi^2 a^3$. **901.** $\frac{\pi a^2 bc}{3h}$. **902.** $\frac{a^4b^4c^4}{360h^9}$. **903.** $\frac{4\pi abc^7}{21h^6}$. **904.** $\frac{1}{6}\frac{a^2b^2c^2}{h^3}$.

905. $2\pi^2(1-\alpha^2)abc$. **906.** $\frac{\pi}{3}\left(1-\frac{1}{e}\right)\frac{abc^2}{h}$. **907.** $\frac{\pi^2}{6}\cdot\frac{abc^2}{h}$. **908.** $\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}\cdot\frac{a^2b^2c^2}{h^3}$.

909. $\frac{abc^4}{60l^3}$. **910.** $\frac{abc}{60}\left(\frac{a}{h}+\frac{b}{k}\right)\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right)$. **911.** $\frac{abc}{60}\frac{hk}{ak+bh}\left(\frac{a}{h}\right)^4$.

912. $\frac{abc}{60}\cdot\frac{h(5c+4h)}{(c+h)^2}$. **913.** $\frac{a^2b^2c^2}{360h^3}$. **914.** $\frac{\pi abc}{64}\left(\frac{a}{h}+\frac{b}{k}\right)\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right)$.

915. $\frac{\pi abc}{64}\cdot\frac{hk}{ak+bh}\left(\frac{a}{h}\right)^4$. **916.** $\frac{abc}{12}$. **917.** $\frac{abc}{3\pi}$. **918.** $\frac{4\pi}{35}abc$. **919.** $\frac{abc}{90}$.

920. $\frac{abc}{1680}$. **921.** $\frac{49}{864}a^3$. **922.** $\frac{8h_1h_2h_3}{|\Delta|}$, где $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$. **923.** $\frac{4\pi}{3|\Delta|}$.

924. $\frac{2\pi h}{|\Delta|}$. **925.** $\frac{4}{3|\Delta|}$. **926.** $\left(\frac{a}{4};\ \frac{a}{4};\ \frac{a}{4}\right)$. **927.** $\left(\frac{3}{5}a;\ \frac{3}{5}b;\ \frac{9}{32}\sqrt{ab}\right)$.

928. $\left(\frac{1}{3}a;\ \frac{1}{3}b;\ \frac{2}{9}c\right)$. **929.** $\left(0;\ 0;\ \frac{3}{4}h\right)$. **930.** $\left(\frac{3}{8}a;\ \frac{3}{8}a;\ \frac{3}{8}a\right)$.

931. $\left(0;\ 0;\ \frac{3}{4}\frac{(a+h)^2}{2a+h}\right)$. **932.** $\left(\frac{12a}{5(3\pi-4)};\ 0;\ 0\right)$. **933.** $\left(-\frac{1}{2};\ -\frac{1}{2};\ \frac{5}{6}\right)$.

934. $\left(0;\ 0;\ \frac{a}{2}\right)$. **935.** $x_c = y_c = a - z_c = \frac{16\sqrt{2}-6-3\pi}{4(3\pi-4\sqrt{2})}a = 0{,}47789a$.

936. $x_c = y_c = z_c = \frac{9\pi a}{448}$. **937.** $\left(0;\ 0,\ \frac{9}{20}a\right)$. **938.** $\left(0;\ 0;\ \frac{3(2+\sqrt{2})}{16}c\right)$.

939. $\left(0;\ 0;\ \frac{7}{30}c\right)$. **940.** $\left(\frac{3}{28}a;\ \frac{3}{28}b;\ \frac{3}{38}c\right)$. **941.** $\left(\frac{21}{128}a;\ \frac{21}{128}b;\ \frac{21}{128}c\right)$.

942. $\frac{abc}{3}(a^2+b^2)$. **943.** $\frac{32\sqrt{2}}{135}a^5$. **944.** $\frac{\pi a^4 h}{10}$. **945.** $\frac{\pi a^5}{\sqrt{2}}$. **946.** $\frac{9\pi}{140}a^5$.

947. $\frac{4\pi}{15}abc(a^2+b^2)$. **948.** $\frac{abc}{60}(a^2+b^2)$. **949.** $\frac{4\pi}{715}abc(a^2+b^2)$. **950.** $\frac{\pi^2 ar^2}{2}(4a^2+3r^2)$.

951. $\frac{\pi^2 ar^2}{4}(4a^2+5r^2)$. **952.** $\frac{\pi abh}{20}(b^2+4h^2)$. **953.** $\frac{\pi R^2 H}{12}(4H^2+\sqrt{3}R^2)$.

954. $\frac{\pi R^2 H}{60}(3R^2+2H^2)$. **956.** $h=a\sqrt{3}$. **957.** $h=2a$. **958.** $h=a$. **969.** $2\omega k$.

970. $2\pi a^2\omega$. **971.** $4\pi\omega$. **973.** $3v$, где v объем тела. **974.** $\frac{12}{5}\pi a^5$. **975.** 0.

997. $2P=(a-x)^2+(b-x)^2$; если $a\leqslant x\leqslant b$; $2P=|(a-x)^2-(b-x)^2|$, если $x<a$ или $x>b$. **998.** $P''=2\mu(x)$, если $a<x<b$; $P''=0$, если $x<a$ или $x>b$. **999.** $P=\mu\pi R^2\ln a$, если $a>R$, „a" расстояние от центра; $P=\mu\pi R^2\ln R-\frac{1}{2}\mu\pi(R^2-a^2)$, если $a<R$. **1000.** $\ln(u^2-4x^2)+x\ln\frac{u+2x}{u-2x}+$ $+2y\operatorname{arctg}\frac{y}{u}=4\ln 2$, где $u^2=x^2+y^2+1$. **1001.** $P=2\pi\int\limits_0^a\mu(\rho)\max(\ln r,\ln\rho)\rho\,d\rho$.

1002. $P=4\pi\mu\min\left(a,\frac{a^2}{\rho}\right)$; $\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. **1003.** $P=\frac{4\pi a^3}{3R}\mu$, если $R>a$; $P=2\pi\mu\left(a^2-\frac{1}{3}R^2\right)$, если $R<a$. **1004.** $P=4\pi\int\limits_0^a\mu(\rho)\min\left(\frac{\rho^2}{r},\rho\right)d\rho$.

1005. $P=\frac{2\pi\mu}{3z}\left[(a^2+z^2)^{3/2}-z^3-\frac{3}{2}a^2z+a^3\right]$; $z>a$; $P=\frac{2\pi\mu}{3z}\left[(a^2+z^2)^{3/2}-\right.$ $\left.-a^3+\frac{3}{2}a^2z-2z^3\right]$; $z<a$. **1006.** $\frac{4\pi}{3R}(b^3-a^3)$ вне; $\frac{2\pi}{3R}(3b^2R-R^3-2a^3)$ в слое; $2\pi(b^2-a^2)$ в полости. **1007.** $\mu\pi h[\sqrt{h^2+r^2}-h]$. **1008.** $F_z=k\mu\frac{4\pi a}{5}$;

$F_{0z}=k\mu\ \frac{4}{3}\pi\rho$; $\rho=\frac{a}{\sqrt[3]{5}}$; $F_z:F_{0z}=3:\sqrt[3]{25}=1{,}02528\ldots$

1009. $P=\frac{1}{a}[\sqrt{u-2ax}-\sqrt{u+2ax}]+\frac{x}{a}\ln\frac{\sqrt{u-2ax}+a-x}{\sqrt{u+2ax}-a-x}$; $u=x^2+$ $+y^2+a^2$. **1010.** $P=2\pi\mu(\sqrt{a^2+z^2}-z)$. **1014.** $\iint\limits_S\frac{dx\,dy}{r}=\int\limits_s\ln r\cos(\mathbf{r},\mathbf{n})\,ds$.

1016. $\frac{4\pi}{3}f\mu a$. **1020.** $\frac{1}{n!}$. **1021.** $\frac{1}{(n+1)!}$. **1022.** $\frac{2^n a^n}{n!}$. **1023.** $\frac{n}{3}$. **1024.** $\frac{n(n-1)}{8}$.

1030. $\frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\ldots\Gamma(\alpha_n)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)}\int\limits_0^a u^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n-1}F(u)\,du$. **1031.** $\frac{8\pi^2a^5}{15}$.

1032. $y = xy'$; касательная и радиус-вектор совпадают. **1033.** $x + yy' = 0$; касательная перпендикулярна к радиусу-вектору. **1034.** $x^2 - y^2 + 2xyy' = 0$. **1035.** $xy' = 2y$. **1036.** $y = xy' + y'^2$. **1037.** $2\dfrac{x + yy'}{x^2 + y^2} = \dfrac{x - yy'}{x^2 - y^2}$. **1038.** $y^2(1+y'^2)=1$. Длина нормали равна единице. **1039.** $xy'=y\ln y'$. **1040.** $(x + yy')(xy' - y) = (a^2 - b^2)y'$. **1041.** $y[(y'^2 + 1)\operatorname{arctg} y' - y'] = x$. **1042.** $y(y'^2 + 1) = 2a$. **1043.** $y^2(1 + y'^2) = a^2y'^2$. Длина касательной постоянна. **1044.** $y'' = 0$. Кривизна равна нулю. **1045.** $y''' = 0$. **1046.** $(y'')^2 = (1 + y'^2)^3$. Кривизна равна единице. **1047.** $\left[\dfrac{(1 + y'^2)^3}{y''^2}\right]' = 0$. Кривизна постоянна. **1048.** $y'' + y = 0$. **1049.** $y'' - 2y' + y = 0$. **1052.** $y = xy'$; $z = xz'$. **1053.** $x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0$; $dx + dy + dz = 0$. **1054.** $y' + z = 0$; $z' - y = 0$. **1055.** $\dfrac{dx}{dt} = -y$; $\dfrac{dy}{dt} = x$; $\dfrac{d^2z}{dt^2} = 0$. **1056.** $xy' = y$; $1 + y'^2 = z'^2$. **1057.** $xy' = y$; $1 + y'^2 = 2(z - xz' + 1)z'^2$. **1058.** $z = \dfrac{1}{3}x^3 - xy^2 + C$. **1059.** $z = xy + \dfrac{y}{x} + C$. **1060.** $z = \sqrt{x^2 + y^2} + xy + C$. **1061.** $x = \dfrac{e^y - 1}{1 + x^2} + C$. **1062.** $z = \ln(x + y) - \dfrac{y}{x + y} + C$. **1063.** $u = \dfrac{x - 3y}{z} + C$. **1064.** $u = \dfrac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3) - xyz + C$. **1065.** $P = x^2 + (y + z)^2 + C$. **1066.** $P = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$. **1067.** $a = b = 1$; $c = -3$; $\alpha = \beta = -3\gamma = +3$; $P = C - \dfrac{x + y - z}{(x + y + z)^2}$. **1068.** $a = b = -1$; $z = \dfrac{x - y}{x^2 + y^2} + C$. **1069.** $u = \dfrac{\partial^n \ln r}{\partial x^{n-1}\partial y}$. **1071.** $x^2 - y^2 + 2xy = C$. **1072.** $x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C$. **1073.** $x^4 - 6x^2y^2 + y^4 = C$. **1074.** $\sqrt{x^2 + y^2} + \dfrac{y}{x} = C$. **1075.** $x^2 + y^2 + 2\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = C$. **1076.** $y = x$. **1077.** $x + ye^{\frac{x}{y}} = 1 + e$. **1078.** $x(1 + y^2) = C$. **1079.** $(1 + x^2)(1 + y^2) = Cx^2$. **1080.** $y = \operatorname{tg}\ln Cx$. **1081.** 1) $y = x$; $2x^2 + 2xy + 2y^2 + 3x + 3y = 0$. 2) $3(x^2 - y^2) + 2(x^3 - y^3) + 5 = 0$. **1082.** $y = 1$; $\ln y = A\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$. **1083.** $y^2 - 1 = 2\ln\dfrac{e^x + 1}{e + 1}$. **1084.** $y = 1$; $\sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2} = 1$. **1085.** $y = 0$; $y = (x + 1)^2$. **1086.** $y = 1$. **1087.** $x = a$; $y = a\operatorname{tg}\sqrt{\dfrac{a - x}{x}}$. **1088.** 1) $y = 1$; 2) $y = 1 + (a - 1)e^{-\frac{1}{3}x^3}$. **1089.** $y(C\sqrt{1 - x^2} - a) = 1$. **1090.** $y^2(Ce^{x^2} + 1) = 1$. **1091.** $y = 0$; $y = (\sqrt{x + 1} + C)^2$. **1092.** $xy = C$; $x^2 + y^2 = C$. **1093.** $y - y_0 = \sqrt{x - x^2} - \arcsin\sqrt{x}$. **1094.** $x^{\frac{2}{3}} + (y - y_0)^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. **1095.** $x^2 + (y - y_0)^2 = a^2$.

1096. $x - x_0 = \cos\varphi + \ln \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$; $y = \sin\varphi$. **1097.** $y = Cx^{\frac{1-k}{k}}$. **1098.** $y = Cx^2$.
1099. $y = x - \frac{1}{x+C}$. **1100.** $x + C = \operatorname{ctg}\left(\frac{y-x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$.
1101. $(ax + by + c)\,b + a = Ce^{bx}$. **1102.** $2bu - 2a\ln(a + bu) = b^2(x + C)$; $u^2 = ax + by + c$. **1103.** $ax + by + c = \sqrt{\frac{a}{b}}\operatorname{tg}(C + x\sqrt{ab})$. **1104.** $x + y = a\operatorname{tg}\left(\frac{y}{a} + C\right)$. **1105.** $v + C = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{u-v}{2}\right)$. **1106.** $y = Ce^{\frac{x}{a}}$.
1107. $y^2 = 2p(x + C)$. **1108.** $xy = C$. **1109.** $x^m y^n = C$. **1110.** $r = Ce^{\frac{\varphi}{a}}$.
1111. $r = C\sin\varphi$. **1112.** $r^2 = C\sin 2\varphi$. **1113.** $4x = C \pm am^2\,(t - \sin t)$; $4y = am^2(1 + \cos t)$; $z = am\cos\frac{t}{2}$, где $m = \operatorname{tg}\gamma$. **1114.** $x = m[\cos(t+\alpha) + t\sin(t+\alpha)]$; $y = m[\sin(t+\alpha) - t\cos(t+\alpha)]$; $2az = m^2(1+t^2)$; $m = a\operatorname{ctg}\gamma$. **1115.** $x = a\operatorname{ch} t\cos(C + t)$; $y = a\operatorname{ch} t\sin(C + t)$; $z = at$.
1116. $r = Ce^{\pm\frac{\varphi}{\sqrt{2}}}$; $z = r$. **1117.** $y = \varphi(x)$; $z - C = \pm\operatorname{ctg}\alpha\int\sqrt{1 + [\varphi'(x)]^2}\,dx$.
1118. $\varphi + C = \operatorname{tg}\alpha\cdot\ln\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$. **1119.** $\alpha = 75°$. **1120.** $y = m\operatorname{ch}\frac{x-a}{m}$.
1125. $r = \sqrt{\frac{A}{a}}\sin 2(\varphi - \varphi_0)$; особый интеграл $r = \sqrt{\frac{A}{a}}$.
1126. $\frac{S}{g\sigma}\left[\frac{v}{\sigma}\ln\frac{v}{v - \sigma\sqrt{2gH}} - \sqrt{2gH}\right]$. Возможно, если $v > \sigma\sqrt{2gH}$.
1127. 1) $v = \frac{gm}{k}\left(1 - e^{-\frac{kt}{m}}\right)$, $S = \frac{gm}{k}t - \frac{gm^2}{k^2}\left(1 - e^{-\frac{kt}{m}}\right)$; 2) $v = \sqrt{\frac{g}{k}}\operatorname{tg}\left(t\frac{\sqrt{gk}}{m}\right)$; $S = \frac{m}{k}\ln\operatorname{ch}\left(t\frac{\sqrt{gk}}{m}\right)$. **1128.** $p = Ce^{\frac{\rho_0\omega^2}{2p_0}r^2}$.
1129. $\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2 + y^2} + C$. **1130.** $x + y = 0$. **1131.** $y\ln y + x = Cy$.
1132. $y = x\ln Cy$. **1133.** $y = x\operatorname{tg}(\ln Cx)$. **1134.** $3x^4 + 8x^3y + 6x^2y^2 = C$.
1135. $y(y - 2x)^3 = C(y - x)^2$. **1136.** $Cy^3 = x^2 - y^2$. **1137.** $y = x\sqrt{C + \ln(x^2)}$; $C = 0$. **1138.** $2Cy = C^2x^2 + 1$. **1139.** $\sqrt{\frac{x}{y}} + \ln y = C$. **1140.** $y = xe^{1+Cx}$.
1141. 1) $y = 1 - x + Ce^{-x}$; $y = 1 - x - e^{-x}$; 2) $y = \frac{x^2}{2} + C$; $y = \frac{x^2}{2}$.
1142. $y(C - x) = C^2$; $y = 4x$. **1143.** $y = Cx$; $y = Cx^2$. **1144.** $x + 2y + 3\ln(x + y - 2) = C$. **1145.** $(x + y - 1)^3 = C(x - y + 3)$. **1148.** 1) $x^2 + y^2 = Cx$; 2) $x^2 = C^2 - 2Cy$; 3) $xy = C$. **1149.** $x = Cye^{\frac{1}{xy}}$. **1150.** $x^2e^{x^2y^2} = Cy^2$. **1151.** $x^2 = Cy^2 - y^4$. **1152.** $xy^2\sin(\ln Cx) = 1$. **1153.** $x^2 = y^4 + Cy^6$.
1154. $y^2 = x\ln(Cy^2)$. **1155.** $x^2y^2 + 1 = Cy$. **1156.** $x^6 + y^4 = Cy^2$.

1157. $(C-\ln x)(1-xy)=2$. **1158.** $xy(1-Cx^{a-1})=1-Cax^{a-1}$, если $a\neq 1$. При $a=1$ $(xy-1)\ln(Cx)=1$. **1159.** $2x^3y^3=3a^2x^2+C$. **1160.** $y=x$. **1161.** $y=\frac{1}{5}x^5+\frac{C}{x^3}$. **1162.** $y=Ce^{-ax}+\frac{e^{mx}}{m+a}$, если $m\neq -a$; если $m=-a$, то $y=Ce^{mx}+xe^{mx}$. **1163.** $y=x(1+x^2)+C(1+x^2)$. **1164.** $y=(x^2+C)e^{-x^2}$. **1165.** $y=(x+C)\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. **1166.** $y=2e^{-\sin x}+\sin x-1$. **1167.** $y=x+\sqrt{1-x^2}$. **1168.** $y^2-2x=Cy^3$. **1169.** $x=y^2\left(1+Ce^{\frac{1}{y}}\right)$. **1170.** $(1+Cx+\ln x)y=1$. **1171.** $y^2+2x^2y^2+Cy^2e^{2x^2}=2$. **1172.** $a^2y^3=Ce^{ax}-a(x+1)-1$. **1173.** $ny^n=Ce^{-\frac{nx}{a}}+nx-a$. **1174.** $x=Ce^{-y}-y^2+2y-2$. **1175.** $\left(2-y^2+Ce^{-\frac{y^2}{2}}\right)x=1$. **1176.** $y^4+2x^2y^2+2y^2=C$. **1177.** $x^2+y^2-2y=Ce^{-x}$. **1178.** $3e^{-2y}=Ce^{-2x}-2e^x$. **1179.** $e^y(1+Cx)=1$. **1180.** $\sin y=x+Ce^{-x}$. **1181.** $\operatorname{tg}\frac{y}{2}=Ce^{-x}-x+1$. **1182.** $\varphi(x)=Cx^{-\frac{n-1}{n}}$. **1183.** $y=2-(2+a^2)e^{\frac{x^2-a^2}{2}}$. **1184.** $x^3y=Ce^{-\frac{1}{x}}$. **1185.** $3y=(x-3)\sqrt{x}$. **1186.** $y^2=1-e^x$. **1188.** $x+2y+ax(x+y)=C(x+y)^2$. **1189.** $\frac{x}{x+y}=Ce^{\frac{x(a-y)}{a(x+y)}}$.

1190. $3x(x^2+y^2)^2-2y(3x^2+y^2)=Cx^3$. **1191.** $I=\frac{V}{R}+\left(I_0-\frac{V}{R}\right)e^{-\frac{Rt}{L}}$.

1192. $I=\frac{V_0}{R^2+(2\pi nL)^2}\left[R\sin 2\pi nt+2\pi nL\left(e^{-\frac{Rt}{L}}-\cos 2\pi nt\right)\right]+I_0e^{-\frac{Rt}{L}}$.

1193. $3axy=x^3+2a^3$. **1194.** $y=\frac{1}{Cx-x\ln x}-\frac{1}{x}$. **1195.** $y=\frac{2x^3-C}{x(C+x^3)}$. **1196.** $y=\frac{2}{x}+\frac{4}{x\ln x+Cx}$. **1197.** $y(x^4+Cx)=4x^3+C$. **1198.** $y=-3+\frac{x^2}{x\operatorname{th}(x+C)-1}$. **1199.** $y=\frac{x^2}{u-3}$; $u=\frac{x^2}{1+v}$; $v=x\operatorname{ctg}(C-x)$.

1200. $y=\frac{t}{u-7}$; $x=t^{\frac{3}{2}}$; $u=\frac{t}{v+5}$; $v=\frac{t}{w-3}$; $w=\frac{t}{z+1}$; $z=\sqrt{t}\operatorname{ctg}(C-\sqrt{t})$. **1201.** $y=\frac{u}{x}$; $x=t^{-\frac{5}{2}}$; $u=5+\frac{t}{v}$; $u=3+\frac{t}{w}$; $w=1+\frac{t}{z}$; $z=\sqrt{t}\operatorname{th}(C-\sqrt{t})$. **1202.** $xy=u$; $x^2t=1$; $vu=v+t$; $v=\sqrt{t}\operatorname{cth}(C-\sqrt{t})$. **1203.** $xy=u$; $x^2t=1$; $vu=v+t$; $v=\sqrt{t}\operatorname{ctg}(C-\sqrt{t})$.
1204. $xy=u$; $x^2t^3=1$; $u=-1+\frac{t}{v}$; $v=\frac{1}{3}+\frac{t}{w}$; $w=\sqrt{t}\operatorname{ctg}(C+3\sqrt{t})$.

1205. $xy=u$; $x^2=t^3$; $u=\dfrac{3t}{3v+1}$; $v=-\sqrt{t}\,\mathrm{th}\,(C+3\sqrt{t})$. **1206.** $x-1=$ $=C(y-1)$. **1207.** $x+y+x^2+xy=C(1+x+y)^2$. **1208.** $y(x+y)=$ $=1+x+y+C(x+y)^2$. **1209.** $y+2=C(x-1)$. **1210.** $(2x-3y+1)(x+y+1)=C(x+y-1)^2$. **1211.** $(x+y+1)^2=$ $=C(x^2+y^2+1)$. **1212.** $(y-1)^2+x^2=Cy^2e^{-2\,\mathrm{arctg}\frac{x}{y-1}}$. **1213.** $x^2-y=Cx$. **1214.** $6x^2y+2y^3-6ax^4-3x^5=Cx^3$. **1215.** $x^2y+2x=Cy$. **1216.** x^2y-x+ $+y^2+y\ln y=Cy$. **1217.** $xy^2-2x^2y-2=Cx$. **1218.** $x^2+y^2=Ce^{-x}$. **1219.** $x\sin y+y\cos y-\sin y=Ce^{-x}$. **1220.** $xy+x+y=C(x+y)(x+y+2)$. **1221.** $xy(x^2+y^2)+1=Cxy$. **1222.** $xy-\ln y=C$. **1223.** $x^2y^2+2\ln\dfrac{x}{y}=C$. **1224.** $x^2-y^2-1=Cx$. **1225.** $x^2+y^2=C(y-1)^2$. **1226.** $\mu=\dfrac{1}{\omega-\omega_1}$. **1227.** $y=x\,\mathrm{tg}\,(x+C)$. **1228.** $y^2-1+Cxy=0$. **1229.** $x^2+y^2=Cy^2e^{2x}$. **1230.** $Cx=(x+y)\,e^{\frac{x(a-y)}{a(x+y)}}$. **1231.** $xy^2\ln(Cxy)=1$. **1232.** $xy^2=\ln\dfrac{Cx^2}{y}$. **1235.** $2b+c(x+y)=C(cxy-a)$. **1236.** $a+b(x+y)+cxy=$ $=C(x-y)$. **1237.** $C^2(x-y)^2-2C[2cxy+b(x+y)+2a]+b^2-4ac=0$. **1238.** $y\sqrt{a+bx+cx^2}+x\sqrt{a+by+cy^2}=C(y-x)$. **1249.** $(x^2+C-2y)\times$ $\times(x+y-1+Ce^{-x})=0$. **1250.** $y+C\pm\ln(x+\sqrt{x^2-1})=0$. **1251.** $(xy-C)(x^2y-C)=0$. **1252.** $x^2(3y^2-x^2)^2-2Cy(y^2-3x^2)+C^2=0$. **1253.** $15y+C=6u^5-10u^3$; $u^2=1-x$. **1254.** $(x-C)^2+(y-C)^2=C^2$. **1255.** $y=x\,\mathrm{ch}\,(x+C)$. **1256.** $x=Ce^{\varphi+\frac{1}{2}e^{-2\varphi}}$; $y=2C\,\mathrm{ch}\,\varphi e^{\varphi+\frac{1}{2}e^{-2\varphi}}$. **1257.** $y=ax+C$; $a^3-3a+1=0$. **1258.** $y=ax+C$; $a=e^a\sin a$. **1259.** $x=ap+bp^2$; $6y=C+3ap^2+4bp^3$. **1260.** $x=2p+3p^2+C$; $y=p^2+2p^3$. Особенное решение $y=0$. **1261.** $y=(\sqrt{C+2x}-1)\,e^{\sqrt{C+2x}-1}$. **1262.** $2y+C=x^2\pm[x\sqrt{x^2+1}+\ln(x+\sqrt{x^2+1})]$. **1263.** $x=v^u$; $y+C=$ $=\int v^{2u}\left(v\ln v-\dfrac{1}{u}\right)du$; $v=1+\dfrac{1}{u}$. **1264.** $x=\dfrac{at}{1+t^3}$; $y+C=\dfrac{a^2}{6}\cdot\dfrac{4t^3+1}{(1+t^3)^2}$. **1265.** $y=Cx+C^2$; $4y=-x^2$. **1266.** $y=Cx+C-C^2$; $4y=(x+1)^2$. **1267.** $y=$ $=Cx-a\sqrt{1+C^2}$; $x^2+y^2=a^2$. **1268.** $y=Cx\pm\sqrt{1-C^2}$; $y^2-x^2=1$. **1269.** $x=Cy+C^2$; $4x=-y^2$. **1270.** $2x=C+3p^2+6p$; $y=x+p^3-3p$; $y=x-2$. **1271.** $Cy=(x-C)^2$; $y=0$; $y=-4x$. **1272.** $y=(C+\sqrt{x+1})^2$; $y=0$. **1273.** $x=2(1-t)+Ce^{-t}$; $y=x(1+t)+t^2$. **1274.** $3t^2x=C+2t^3$; $3ty=$ $=2C+t^3$. **1275.** $t^2x=C+\ln t$; $ty=2xt^2+1$. **1276.** $(y-x-2a)^2=8ax$. **1277.** $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$. **1278.** Эллипсы и гиперболы. **1279.** $xy=a^2$. **1280.** $3x\sqrt{p}=1-p\sqrt{p}$; $6y=-2\sqrt{p}-p^2$. **1281.** $4y=-(x+1)^2$. **1282.** $4y+x^3=0$. **1283.** $4y+x^5=0$. **1284.** $y=x$. **1285.** $xy=1$.

1286. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1\right)^2=4\frac{x}{a}\frac{y}{b}$. **1287.** $y=\pm 2e^{\frac{x}{2}}$. **1288.** $y^2-x^2=1$. **1289.** $16y=x^4$; $y=0$. **1290.** $y^2\pm 2ax=0$. **1291.** $x^2+2y^2=C^2$. **1292.** $x^2+\sigma y^2=C$. **1293.** $b^2\ln y=a^2\ln(Cx)$. **1294.** $x^2+y^2=2a^2\ln(Cx)$. **1295.** $y^{2-\sigma}=x^{2-\sigma}+C$, если $\sigma\neq 2$; $y=Cx$, если $\sigma=2$. **1296.** Софокусные гиперболы. **1297.** $x+C=a\left(\cos t+\ln\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)$; $y=a\sin t$. **1298.** $9p(y+C)^2=8x^3$. **1299.** $y^2=Ce^{-\frac{x}{p}}-2px+2p^2$. **1300.** $(x^2+y^2)^2=$ $=C(y^2+2x^2)$. **1301.** $(x^2+y^2)^2=Cxy$. **1302.** $(x^2+y^2)^3=Cy(y^2+3x^2)$. **1303.** $(x^2-y^2)^3=(C+x^3+3xy^2)^2$. **1304.** $x=C\left(\cos t\pm\frac{1}{\sin\theta}\right)\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)^{\pm\sin\theta}$; $y=\pm C\sin t\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)^{\pm\sin\theta}$; $\operatorname{tg}\theta=a$. **1305.** $r=C(1-\cos\varphi)$. **1306.** $r=$ $=Ce^{-\varphi^2+\frac{2\varphi^3}{3\pi}}$. **1307.** $2y^2-1=C(2x^2+1)$. **1308.** $r^{-n}=a^{-n}\cos n\varphi+b^{-n}\sin n\varphi$. **1309.** $x=-C\sin\varphi-\frac{P}{2}\sin\varphi\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)$; $y=C\cos\varphi-\frac{P}{2}\operatorname{tg}\varphi+$ $+\frac{P}{2}\cos\varphi\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)$. **1310.** $x\operatorname{ch}t=C+a(t\operatorname{ch}t-\operatorname{sh}t)$; $y\operatorname{ch}t=C\operatorname{sh}t+a$. **1311.** $x=2a(t\sin t-\cos t)+(at^2+C)\cos t$; $y=2a(\sin t+t\cos t)-$ $-(at^2+C)\sin t$. **1312.** $r=C[1+\cos(\varphi\pm 2\alpha)]$. **1313.** $r^2\cos(2\varphi\pm\alpha)=C$. **1314.** $r=C\cos(\varphi\pm\alpha)$. **1315.** $r=a\cos^m\frac{\varphi-\varphi_0}{m}$. **1316.** $x=Ce^{\varphi}(\sin\varphi+$ $+\cos\varphi)-a\sqrt{2}\sin\varphi$; $y=Ce^{\varphi}(\sin\varphi-\cos\varphi)+a\sqrt{2}\cos\varphi$. **1317.** $y=z\varphi\left(\frac{x}{z}\right)$; $\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\operatorname{ctg}\int\frac{\pm\sqrt{AC-B^2}}{A}\,dt$, где $tz=x$, $A=t^2+\varphi^2(t)+1$, $B=t+\varphi\varphi'$, $C=1+\varphi'^2$. **1318.** Если уравнение параболоида $x=r\cos\varphi$; $y=r\sin\varphi$; $2az=r^2$, то $\varphi+C=\frac{m}{a}\sqrt{r^2+a^2}-m\ln\frac{a+\sqrt{r^2+a^2}}{r}$; $m=\operatorname{tg}\alpha$. **1319.** Если a радиус поперечного сечения тора, $l>a$ — расстояние центра этого сечения от оси вращения, то в полярных координатах $r\left\{l+a\cos\left[\frac{\sqrt{l^2-a^2}}{a}\operatorname{cotg}\alpha(\varphi-\varphi_0)\right]\right\}=l^2-a^2$; $z^2=a^2-(l-r)^2$. **1320.** Циклоида, получаемая качением круга по прямой, параллельной оси вращения. **1321.** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$; $y=Ax^{\frac{a^2}{b^2}}$. **1322.** Их проекции на xOy — трактрисы; $y-y_0=\sqrt{a^2-x^2}+\ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}$. **1323.** $x=a\sin t$; $y=y_0+$ $+a\cos\alpha\left[\cos t+\ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right|\right]$; $z=\left[y_0+a\cos\alpha\ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right|\right]\operatorname{cotg}\alpha-a\sin\alpha\cos t$. **1324.** Проекции — логарифмики $x-x_0=-p\ln|y|$. **1325.** $xy+y^2=1+Ce^{-\frac{x^2}{2}}$.

1326. $x+a\ln(x+y)-a\ln x=C$. **1327.** $x^2=C(y+\sqrt{x^2+y^2})$. **1328.** $(x^2+y^2)e^y=C$. **1329.** $x^2-2xy-y^2-8x+4y=C$. **1330.** $(x+C)y=x-C$. **1331.** $y=x\sqrt{C+2\ln y}$. **1332.** $y=Cx+C^2$; $4y+x^2=0$. **1333.** $4x^2y=(x+C)^2$; $y=\frac{1}{4}$; $y=0$. **1334.** $(C-x)y=x$. **1335.** $x^3+3x^2y+xy-y=C$.

1336. $xy=(x+C)(x-1)$. **1337.** $x=y^2\left(1+Ce^{\frac{1}{y}}\right)$. **1338.** $x(C-y)=C^2$; $x^2=4y$. **1339.** $2y=xt-\sqrt{1+t^2}$; $x=t\ln(1+\sqrt{1+t^2})-t\ln t+Ct$; $2y+1=0$. **1340.** $y=(Cx-C^3)^2$; $27y=4x^3$. **1341.** $(x-C)^2+y^2=aC$; $y^2-\frac{a^2}{4}=ax$. **1342.** $x=2Ce^{-\frac{\varphi}{2}}\cos\varphi$; $y=C^2e^{-\varphi}(2+\sin 2\varphi)$. **1343.** $x=2Ce^{-\varphi}\cos\varphi$; $y=C^2e^{-2\varphi}(1+\sin 2\varphi)$. **1344.** $x=2C\varphi e^{\varphi}$; $y=C^2e^{2\varphi}(1+2\varphi+2\varphi^2)$; $2y=x^2$. **1345.** $2y=C^2+2Cx-x^2$; $y=-x^2$. **1346.** $y^2+Cx^2=C^2$. **1347.** $x\sqrt{C-t}=a\cos^2 t$; $y\sqrt{C-t}=a(2C-2t+\sin t\cos t)$. **1348.** $y=xt-x^{-m}e^t$; $x=e^{\frac{t}{m}}\left[C+(m+1)e^{\frac{t}{m}}\right]^{-\frac{1}{m+1}}$. **1349.** $C^2x-Cxy+a^3=0$; $xy^2=4a^3$. **1350.** $\frac{2}{y-x}=\ln\frac{x-1}{x+1}+C$. **1351.** $\ln(u-v)^3\left(u^2+uv+\frac{v^2}{3}\right)^2-2\operatorname{arctg}\frac{2u+v}{v}=C$; $u=y^{\frac{1}{3}}$; $v=x^{1/2}$. **1352.** $(y^2-Cx^2)^2-2(y^2+Cx^2)+4Cy^2+1=0$. **1353.** $y+2y^3-\frac{3}{2}x^2y^2+\frac{1}{3}x^3=C$. **1354.** $\sqrt{y}-\sqrt{x}=C$; $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{y^2}=C$. **1355.** $(\sqrt{y+x^2}-\alpha x)^{\alpha}(\sqrt{y+x^2}-\beta x)^{-\beta}=C$, где α и β корни уравнения $2\mu^2-\mu-2=0$. **1356.** $x=a\operatorname{sh}t$; $ye^t=at+C$. **1357.** $x=axy-a+Cy$. **1358.** $x\sin(x+y)=C$. **1359.** $\operatorname{tg}y=\frac{x^2+1}{3}+\frac{C}{\sqrt{x^2+1}}$. **1360.** $(x^2+y^2)^2-2a(x^2-y^2)=C$. **1361.** $x^2y^2-2xy\ln y=Cxy+1$; $a(x^2y^2-2xy\ln y)=(a^2-1)xy+a$. **1362.** $y=Ce^x+\frac{1}{C}$. **1363.** $\frac{1}{2}x^2-a^2\ln x+y^2=C$; $x^2-2a^2\ln\frac{x}{2a}+2y^2=22a^2$.

1364. $\ln x=\int\frac{du}{au^n+\frac{1}{n-1}u+b}+C$; $u=yx^{\frac{1}{n-1}}$. **1365.** $x^2+y^2=Cx$; $x^2+y^2=10ax$. **1366.** $x+\frac{1}{x}+y^2-2y+2=Ce^{-y}$. **1367.** $y=\frac{C}{x^4}-\frac{1}{4C}$.

1368. $\ln y=\frac{y}{x}+C$; $x\ln y=y-x$. **1369.** $x=y^3+Cy$. **1370.** $xe^{\frac{y}{x}}=(x+y)\ln Cx$. **1371.** $y=C(x+5)+C^3$; $27y^2=-4(x+5)^3$. **1372.** $q(x^by^a)^p-p(x^{\beta}y^{\alpha})^q=C$, где $p=\frac{\beta n-\alpha m}{\alpha b-\beta a}$; $q=\frac{bn-am}{\alpha b-\beta a}$. **1373.** $y^2=Cx+\frac{x^n}{n-1}$; $(n-1)y^2=x(x^{n-1}-a^{n-1})$. **1374.** Поперечное сечение парабола $y^2=2Cx+C^2$. **1375.** $x^2+y^2=C^2$; $x^2-y^2=C$; $y=x$. **1376.** В полярных координатах $r=Ce^{k\varphi}$.

1377. $\frac{x^2}{C}+\frac{y^2}{C-a^2}=1$. **1378.** Окружность с центром на прямой, соединяющей точки. **1379.** $u^2-xu-x^2=C\left[\frac{2u+x(\sqrt{5}-1)}{2u-x(\sqrt{5}+1)}\right]^{\frac{1}{\sqrt{5}}}$; $u=\sqrt{x^2+y^2}$.

1380. $x+C=\sqrt{a^2-y^2}+a\ln\frac{a-\sqrt{a^2-y^2}}{y}$. **1381.** $r=2a\cos\omega$; $\varphi+C=$ $=\operatorname{tg}\omega-\omega$. **1382.** Парабола. **1383.** $4(y-a)^3=9a^2(x+C)^2$. **1385.** $y=l\operatorname{ch}\frac{x-x_0}{l}$, цепная линия. **1386.** $x=Ce^{-\frac{y}{x}}$. **1387.** $x=C\frac{\sin^2 t-(k-1)\cos^2 t}{\sin^k t}$; $y=-Ck\frac{\sin t\cos t}{\sin^k t}$. **1388.** Окружность с центром в полюсе и ее касательные. **1389.** Парабола $y^2=-16px$ и ее касательные. **1390.** $x=Cy\pm\frac{Q}{y}$. **1391.** $x=a\sin t\cos t$; $y=y_0+a(-\cos^2 t+\ln\cos t)$. **1392.** $x=\frac{y^3}{6a^2}+\frac{a^2}{2y}+$ $+\frac{a^4}{6x_0^3}-\frac{x_0}{2}$; где x_0 — абсцисса начала дуг. **1393.** $2ay=x\sqrt{x^2-a^2}-$ $-a^2\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})$. **1394.** $x+C=\int\sqrt{[f'(y)]^2-1}\,dy$. **1395.** Циклоида. **1396.** Цепная линия. **1397.** $x-C=\sqrt{a^2-y^2}-a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}$. **1398.** $y=\int\limits_0^x\sqrt{1-Cx^m}\,dx$; $m=\frac{2(2-n)}{n-1}$. **1400.** 1) $x=-1$; 2) x^2-y^2+ $+6x+1=0$. **1401.** $r=Ce^{a\varphi}$, логарифмическая спираль. **1402.** „Параболы" и „гиперболы" $y=Cx^n$; $n\neq 1$; $k=\lambda^{n-1}$. **1403.** $z=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$; $x^2=C\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)$. **1404.** $x^2+y^2-2Axy-a^2(A^2-1)=0$; $az=xy$. **1405.** Проекции на плоскость xOy: $(A+BC)(Cx^2-y^2)=C(a^2-b^2)$, где $Aa^2=a^2-c^2$; $Bb^2=b^2-c^2$. **1406.** $y=\frac{x^3}{6}+Ax+B-\sin x$. **1407.** $y=\ln\sin x+C_1+C_2x+C_3x^2$. **1408.** $y=\frac{x^5}{120}+Ax^3+Bx^2+Cx+D$. **1409.** $y=Bx^3+Cx^2+Dx+$ $+E+\frac{1}{6}\int\limits_0^m t(x-t)^3\,dt$; $m=\min(x;\,1)$ при $x>0$. **1410.** $y=\frac{1}{6}\int\limits_0^m |t|(x-t)^3\,dt$; $m=x$ при $|x|<1$; $m=\operatorname{sign}x$ при $|x|>1$. **1411.** $y=(1+C_1^2)\ln(x+C_1)-$ $-C_1x+C_2$. **1412.** $y=(C_1x-C_1^2)e^{\frac{x}{C_1}+1}+C_2$. **1413.** $12y=(x-C_1)^3+C_2$. **1414.** $y=C_1e^{\frac{x}{a}}+C_2x+C_3$. **1415.** $y=(x+C)\ln(x+C)+C_1x+C_2$. **1416.** $y=C_1x(x-C_1)+C_2$; $y=\frac{1}{3}x^3+C$. **1417.** $(x-C_1)^2+(y-C_2)^2=1$.

1418. $x = C_1y^2 + C_2y + C_3$. **1419.** $x = a\sin\varphi + C_2\cos\varphi$; $y = C_1 - a\cos\varphi + C_2\sin\varphi - C_2\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$. **1420.** $x - C_1 = a\ln\sin\frac{y - C_2}{a}$. **1421.** $3y = (C_1 - 2x)^{\frac{3}{2}} + C_2x + C_3$. **1422.** $x^2 + y^2 + Cx + C_1y + C_2 = 0$; $y = C_1x + C_2$. **1423.** $3x = 2(\sqrt{y} - 2C_1)\sqrt{\sqrt{y} + C_1} + C_2$. **1424.** $x + C_2 = \frac{1}{C_1}\ln\frac{\sqrt{C_1^2 + ae^y} - C_1}{\sqrt{C_1^2 + ae^y} + C_1}$.

1425. $C_2^2(x - C_1) = \left(C_2y^{\frac{2}{3}} + 2\right)\sqrt{C_2y^{\frac{2}{3}} - 1}$. **1426.** $y = 2a - C_1\sin^2 t$, $2x = C_2 + C_1(2t - \sin 2t)$. **1427.** $(x - C_1)^2 = 4C(y - C)$. **1428.** $2C_2y^2 = 2C_1C_2 + C_2^2e^{2x} + (C_1^2 - 1)e^{-2x}$. **1429.** $y(C_2 + x) = C_1 + x$. **1430.** $x = C_2 + C_2\ln(y + u) + \ln(y - C_1u)$; $u^2 = y^2 + 1 - C_1^2$. **1431.** $y = C_1e^{Cx}$;

1432. $2(C_1y - 1)^{\frac{3}{2}} = 3C_1x + C_2$. **1433.** $y\cos^2(x + C_1) = C_2$. **1434.** $y + x = 1$. **1435.** $y = 1 - e^x$; $y = -1 + e^{-x}$. **1436.** $x^2 + y^2 = 2x$. **1437.** $2y\sqrt{y} = 3x - 1$.

1438. $y\cos^2 x = 1$. **1439.** $y = a\left[\cos nx\sqrt{1 - k}\right]^{\frac{1}{1-k}}$. **1440.** $y^2 = C_1 + C_2(xu + \ln u)$; $u = x + \sqrt{1 + x^2}$. **1441.** $(y - C_1e^x - C_2e^{-x} + x)(y - C_1\cos x - C_2\sin x - x) = 0$. **1442.** $y = x\left(C_1 - \arcsin\frac{C_2}{x}\right)$. **1443.** $y = x\ln\frac{C_2x}{1 + C_1x}$. **1444.** $y(C_2 + x^2) = C_1x$.

1445. $y = C_1xe^{-\frac{C_2}{x}}$. **1446.** $2\ln C_1y = \frac{C_2}{x} + \frac{x}{C_2}$. **1447.** $y = C_1\sqrt{x^2 + C_2}$. **1448.** $y = x^2[1 + C_1\operatorname{tg}(C_2 + \ln x)]$. **1449.** $x = e^t$; $\frac{xy'}{y} = z$.

1453. $y^2 = C_1 + C_2x^{1-a} - 2\int x^{-a}\left(\int x^{a-1}f(x)\,dx\right)dx$. **1454.** $x + C_2 = \int\frac{dy}{\sqrt{C_1e^{-2ay} + \frac{2b}{4a^2 + 1}(\cos y - 2a\sin y)}}$. **1455.** $\int e^{\int f(y)\,dy}dy = C_1\int e^{-\int\varphi(x)\,dx}dx + C_2$. **1456.** $x = \frac{2}{5}t^3 + \frac{C_1}{t^2}$; $y = \frac{2}{75}t^9 - \frac{7}{10}C_1t^4 - \frac{4C_1^2}{t} + C_2$. **1457.** $\pm\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{R}}x = \frac{R}{2}\arccos\frac{2y - R}{R} + \sqrt{Ry - y^2}$.

1458. $x - 1 = \frac{1}{2}y^2 - y + 2\ln(y + 1)$. **1459.** $y = \sqrt{2a}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2a}} + \ln\left(1 + \frac{x^2}{2a}\right)$. **1460.** $u = C_1\ln(x^2 + y^2) + C_2$. **1461.** $u = \frac{C_1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + C_2$. **1462.** $u = (C_1r^2 + C_2)\ln r + C_3r^2 + C_4$; $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. **1463.** $z = C_1 \times \ln(r + \sqrt{r^2 - C_1^2}) + C_2$; $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. **1464.** Цепная линия, окружность, парабола, циклоида. **1465.** $Cy^2 = C^2(x+C_1)^2 + m$. **1466.** $r = \frac{C}{\cos\omega - m}$; $\varphi = C_1 + \omega + m\int\frac{d\omega}{\cos\omega - m}$. **1467.** $r\cos^2 t = C$; $\varphi = C_1 - 2t + \operatorname{tg} t$. **1468.** Парабола. **1469.** $y + C = a\operatorname{ch}(x + C_1)$. **1470.** $(x-C_1)^2 + (y-C_2)^2 = a^2$. **1471.** $(y-C_1)^2 = Ca - (a+2x)$. **1472.** Цепная линия. **1473.** Логарифмическая спираль. **1474.** Развертка круга. **1475.** Циклоида. **1476.** Эпициклоида. **1477.** Эллипс. **1478.** Окружность. **1479.** Цепная линия. **1480.** Логарифмическая спираль. **1481.** Развертка круга. **1482.** Циклоида. **1483.** Эпициклоида при $|m| < 1$. **1484.** Цепная линия. **1485.** Логарифмическая спираль. **1486.** Циклоида. **1487.** Развертка круга. **1488.** Циклоида. **1489.** Развертка развертки круга. **1490.** Эпициклоида при $b < a$.

1491. $\begin{cases} r\sqrt{1-\sin\omega\cos\omega} = C_0 e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\omega - 1}{\sqrt{3}}}; \\ \varphi = C_1 + \omega - \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\omega - 1}{\sqrt{3}}. \end{cases}$ **1492.** $y = C_1e^x + C_2e^{-x}$.

1493. $y = C_1e^{2x} + Ce^{3x}$. **1494.** $y = Ce^{-x} + C_1e^{-2x}$. **1495.** $y = e^{-x}(Cx + C_1)$. **1496.** $y = e^{2x}(Cx + C_1)$. **1497.** $y = e^{-x}(C\cos 2x + C_1\sin 2x)$. **1498.** $y = e^{-2x}(C\cos 3x + C_1\sin 3x)$. **1499.** $y = e^{-\frac{x}{2}}\left(C\cos\frac{x\sqrt{3}}{2} + C_1\sin\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)$.

1500. $y = C\cos x + C_1\sin x$. **1501.** $y = Ce^{2x} + e^{-x}(C_1\cos x\sqrt{3} + C_2\sin x\sqrt{3})$. **1502.** $y = Ce^{2x} + C_1e^{-2x} + C_2\cos 2x + C_3\sin 2x$. **1503.** $y = e^x(C\cos x + C_1\sin x) + e^{-x}(C_2\cos x + C_3\sin x)$. **1504.** $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3e^{3x}$. **1505.** $y = C_1e^x + e^{2x}(C_2\cos 3x + C_3\sin 3x)$. **1506.** $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3e^{2x} + C_4e^{-2x}$. **1507.** $y = C_1\cos x + C_2\sin x + C_3\sin 2x + C_4\cos 2x$. **1508.** $y = e^{2x}(C_1 + C_2x + C_3x^2)$. **1509.** $y = e^{-\frac{x}{2}}(A + Bx)\cos\frac{x\sqrt{3}}{2} + e^{-\frac{x}{2}}(C + Dx)\sin\frac{x\sqrt{3}}{2}$. **1510.** $y = e^{-x}(C + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3)$.

1511. $y = e^{\frac{3}{2}x}\left(C\cos\frac{x\sqrt{7}}{2} + C_1\sin\frac{x\sqrt{7}}{2}\right) + e^{-x}(C_2\cos x\sqrt{2} + C_3x\sqrt{2})$. **1512.** $y = C + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + e^{-x}(C_4 + C_5x + C_6x^2)$. **1513.** $y = \frac{1}{a^3\sqrt{2}}\left(\operatorname{ch}\frac{ax}{\sqrt{2}}\sin\frac{ax}{\sqrt{2}} - \operatorname{sh}\frac{ax}{\sqrt{2}}\cos\frac{ax}{\sqrt{2}}\right)$.

1514. $y = -a\frac{\operatorname{sh} x\sin x}{\operatorname{sh}\pi}$. **1515.** $y = e^{-x}\sin x$.

1516. $y = \frac{b[(\operatorname{ch} al + \cos al)(\operatorname{sh} ax - \sin ax) - (\operatorname{sh} al + \sin al)(\operatorname{ch} ax - \cos ax)]}{2a^3(1 + \operatorname{ch} al\cos al)}$.

1517. Если $a = \frac{\xi}{l}$, где ξ есть один из корней уравнения $\operatorname{ch}\xi\cos\xi = -1$.

1518. $y = C_1\cos ax + C_2\cos ax + \frac{e^x}{a^2+1}$. **1519.** $y = \frac{1}{3}e^{2x} +$

$+C_1e^{-x}+\left(\frac{x^2-x}{4}+C_2\right)e^x$. **1520.** $y=\frac{1}{2}e^{3x}(x^2-2x+2)+C_1e^x+C_2e^{2x}$.
1521. $y=\frac{1}{32}e^{2x}(2x^2-3x)+\frac{1}{5}\cos x-\frac{x^3}{12}+\frac{x}{8}+C_1+C_2e^{2x}+C_3e^{-2x}$.
1522. $y=-e^{-x}\cos x+\frac{x^3}{6}e^{-x}+e^{-x}(C_1+C_2x)$. **1523.** $y=\frac{x}{2}e^{-x}\sin x+$ $+e^{-x}x+e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$. **1524.** $y=\frac{1}{74}(5x+7\cos x)+C_1e^x+C_2e^{6x}$.
1525. $y=\frac{1}{2}x^2e^x+\frac{1}{4}e^{-x}+\frac{1}{2}\cos x+e^x(C_1+C_2x)$. **1526.** $y=\frac{1}{2}x\sin x+$ $+\frac{1}{8}\cos 3x+C_1\cos x+C_2\sin x$. **1527.** $y=C_1e^{-ax}+C_2e^{ax}+\frac{1}{b^2-a^2}e^{bx}$, если $b\neq a$; $y=C_1e^{-ax}+C_2e^{ax}+\frac{x}{2a}e^{ax}$, если $b=a$. **1528.** $y=A\cos ax+$ $+B\sin ax-\frac{x}{2a}\cos ax$, если $b=a$. **1529.** $y=\frac{1}{6}\sin x+2e^x+C_1\cos 2x+$ $+C_2\sin 2x+(C_3x+C_4)e^{-x}$ **1530.** $y=C_1e^{-2x}\cos 4x+C_2e^{-2x}\sin 4x+$ $+\frac{a}{68}(\sin 4x-4\cos 4x)$. **1531.** $y=C_1e^{-2x}+C_2e^x\cos x+C_3e^x\sin x+$ $+\frac{1}{8}xe^{-x}\cos x-\frac{1}{20}e^x x(3\cos x+\sin x)$. **1532.** $y=C_1e^{-3x}+C_2e^x\cos 2x+$ $+C_3e^x\sin 2x+\frac{1}{221}(10\cos 2x+11\sin 2x)$. **1533.** $y=C_1\cos nx+C_2\sin nx-$ $-\frac{\cos 3nx}{32n^2}+\frac{3}{8n}x\sin nx$. **1534.** $y=C_1\cos nx+C_2\sin nx+\frac{a}{n^2-m^2}x\sin mx+$ $+\left[\frac{b}{n^2-m^2}-\frac{2ma}{(n^2-m^2)^2}\right]\cos mx$. **1535.** $y=C_1\cos nx+C_2\sin nx-$ $-\frac{a}{4n}x^2\cos nx+\frac{2nb+a}{4n^2}x\sin nx$. **1536.** $y=\cos x\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+$ $+C_1\cos x+C_2\sin x$. **1537.** $y=-1-xe^{-x}+(e^x-e^{-x})\ln(1-e^{-x})+C_1e^x+C_2e^{-x}$.
1538. $y=x\sin x+\cos x\ln\cos x+A\cos x+B\sin x$. **1539.** $y=A\cos x+$ $+B\sin x-\sqrt{\cos 2x}$. **1540.** $y=e^{3x}(A+Bx)+\frac{1}{x}$. **1541.** $y=C_1e^{3x}+$ $+C_2xe^{3x}+4\sqrt{x}$. **1542.** $y=A\cos\ln x+B\sin\ln x$. **1543.** $y=Ax+Bx^{-1}$.
1544. $y=A+B\ln x+Cx^3$. **1545.** $y=x(A+B\ln x+C\ln^2 x)$. **1546.** $y=$ $=x(A+B\ln x)+Cx^{-1}$. **1547.** $2y=x+A\cos\ln x+B\sin\ln x$.
1548. $y=(A+B\ln x+\ln^2 x)x$. **1549.** $y=x\ln x+x^3+Cx+C_1x^2$.
1550. $y=x(A+B\ln x)+Cx^2+\frac{x^3}{4}-\frac{3}{2}x\ln^2 x$. **1551.** $y=C_1-3x+$ $+C_2(3x+2)^{-\frac{4}{3}}+5\ln(3x+2)$. **1552.** $y=Ax^2+Bx^3+ax+bx^{-1}$.
1553. $y=Ax+Bx^{-1}+Cx\ln x+Dx^{-1}\ln x+\frac{1}{9}x^2$. **1554.** $y=(x+1)^{-1}[A+$ $+B\ln(x+1)+\ln^3(x+1)]$. **1555.** $y=x^{-1}[2\ln^2 x+\ln x+A+Bx^4]$.
1556. $y=\frac{1}{5}t^2-t+1+(A-\ln t)\cos\ln t+B\sin\ln t$; $t=x+1$. **1557.** $y=C_1x+$

$+\frac{C_2}{x}+\ln(x+1)$. **1558.** $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2x}-\ln x$. **1559.** $y=\left[\frac{b-a\beta}{\alpha-\beta}-\frac{A}{(\alpha-\beta)(\gamma-\alpha)}\right]e^{\alpha x}+$ $+\left[\frac{a\alpha-b}{\alpha-\beta}-\frac{A}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)}\right]e^{\beta x}-\frac{A}{(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}e^{\gamma x}$. **1560.** $y=\left[\frac{b-a\beta}{\alpha-\beta}+\right.$ $\left.+\frac{A}{(\alpha-\beta)^2}\right]e^{\alpha x}+\left[\frac{a\alpha-b}{\alpha-\beta}+\frac{A}{(\alpha-\beta)^2}\right]e^{\beta x}+\frac{Ax}{\alpha-\beta}e^{\alpha x}$. **1561.** $y=$ $=e^{\alpha x}\left[a+(b-a)x+\frac{Ax^2}{2}\right]$. **1562.** $y=\frac{5}{2}e^{x}-2e^{2x}+\frac{1}{2}x^2e^{2x}+\frac{1}{2}e^{3x}$.

1563. $y=\frac{h}{2n^2}+\frac{h}{6n^2}\cos 2nx-\frac{2h}{3n^2}\cos nx$. **1564.** $y=\frac{h}{8n^2}+\left(a-\frac{h}{8n^2}\right)\cos 2nx-$ $-\frac{hx\sin 2nx}{8n}$. **1565.** $y=1-\frac{1}{3}e^{-x}-\frac{2}{3}e^{\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x$. **1566.** $y=1-$ $-e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(\cos\frac{x}{\sqrt{2}}+\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$. **1567.** $y=\pi\sin^2\frac{x}{2}-\sin x+x\cos x$.

1568. $y=\frac{1}{2}(e^{x}-e^{x})$ при $0\leqslant x\leqslant 1$; $8y=3e^{2x-1}-e^{1-2x}-e^{2x-3}+e^{3-2x}$, при $1\leqslant x\leqslant 2$. **1569.** $y=h-\frac{gt}{k_1}+\frac{g}{k_1^2}(1-e^{-k_1t})$; $k_1=\frac{k}{m}$. **1570.** $y=h-$ $-\frac{g_1t}{k_1}-\frac{g_1}{k}(1-e^{-kt})$, $g_1=g(\sin\alpha-l\cos\alpha)$. **1571.** Расстояние x тела от положения равновесия через t секунд выражается формулой $x=Ae^{-qt}\cos(pt+\alpha)$, где $\frac{k}{m}-\left(\frac{n}{2m}\right)^2=p^2$; $\frac{n}{2m}=q$; $p\operatorname{tg}\alpha=-q$; $A[(p^2-q^2)\cos\alpha-2pq\sin\alpha]=kh$. **1572.** Положив $\frac{k}{2m}=p$; $\frac{a^2}{m}=q$, имеем три случая: 1) $q=p^2+\nu^2>p^2$, $x=Ae^{-pt}\cos(\nu t+\mu)$; 2) $q=p^2-\nu^2<p^2$, $x=Ae^{-(p+\nu)t}+Be^{-(p-\nu)t}$; 3) $q=p^2$, $x=e^{-pt}(A+Bt)$. **1573.** $x=A\sin(qt+\alpha)+$ $+\frac{r}{q^2-n^2}\sin nt$, $n\neq q$, $q^2=\frac{a^2}{m}$, $x=A\sin(qt+\alpha)-\frac{rt\cos nt}{2n}$, $n=q$. **1574.** $x=-\frac{kt^2}{2}+v_0t$; $v=x'=-kt+v_0$. Движение прекращается при $v=0$, т. е. при $t=\frac{v_0}{k}$; при этом $x=\frac{v_0^2}{2k}$. **1575.** Движение совершается по разным формулам в различные промежутки времени: 1) при $0<t<\frac{\pi}{k}$ $x=f(n-1)\cos kt+f$; 2) при $\frac{\pi}{k}<t<\frac{2\pi}{k}$ $x=f(n-3)\cos kt-f$; 3) при $\frac{2\pi}{k}<t<\frac{3\pi}{k}$ $x=f(n-5)\cos kt+f, \ldots$ **1576.** $y=A\sin\frac{bx}{a}\sin bt$, где $bl=an\pi$. **1577.** $u(\ln r_2-\ln r_1)=(t_2-t_1)\ln r+t_1\ln r_2-t_2\ln r_1$, где r_1 и r_2 радиусы внешней и внутренней цилиндрической поверхности, r — расстояние точки в веществе стенки от оси трубки. **1578.** $u\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)=$ $=(t_2-t_1)\frac{1}{r}+\frac{t_1}{r_2}-\frac{t_2}{r_1}$. **1579.** $y=\frac{a}{24}x^2(l-x)^2$. **1580.** $al=n\pi$,

1581. $\frac{P}{64D}(a^2-r^2)^2$. **1582.** $\frac{Pa^4}{64D}\left[\frac{5+\nu}{1+\nu}-2\frac{r^2}{a^2}\frac{3+\nu}{1+\nu}+\frac{r^4}{a^4}\right]$. **1583.** $xy = A\cos x+B\sin x$. **1584.** $y=Ce^x+C_1x^2$. **1585.** $y=A\ln x+Bx$. **1586.** $y=A(1+x)+Be^x$. **1587.** $y=A\sin x+B\sin^2 x$. **1588.** $y=A\sin^4 x+B\frac{\cos x}{\sin^3 x}\left(\sin^4 x+\frac{3}{5}\sin^2 x\cos^4 x+\frac{1}{7}\cos^6 x\right)$. **1589.** $y(1-x)=Ax+B(1-x^2+2x\ln x)$. **1590.** $y=A(x+\sqrt{x^2+1})^n+B(x-\sqrt{x^2+1})^n$. **1591.** $y=Ae^{-2x}+B(4x^2+1)$. **1592.** $y=x^3+C_1x^2+C_2(2x-1)$. **1593.** $y=Ae^x(x^2-8x+20)+B(x^3+9x^2+36x+60)$. **1594.** $y=A(x^3-x)+B\left[6x^2-4-3(x^3-x)\ln\frac{x+1}{x-1}\right]$. **1595.** $y=C_1(2x^2-1)+C_2\left[(2x^2-1)\int e^{x^2}dx-xe^x\right]$. **1596.** $y=C_1(x+2)+C_2e^x(x-2)$. **1598.** $\mu=12$; $y=3x-5x^3$. **1600.** $y=\frac{C_1}{x^2}+C_2(2x-3)$. **1601.** $(x-1)y=A+Bx^2$. **1602.** $(x^2-x)y=Ax+B(x-1)$. **1603.** $(x+1)y=Ax+Bx^2(x+1)$. **1604.** $(x^2+1)^2y=A(x^2-1)+Bx$. **1605.** $y=C_1e^{2\sqrt{x}}+C_2e^{-2\sqrt{x}}$. **1606.** $y=A\cos\frac{n}{x}+B\sin\frac{n}{x}$. **1607.** $y\sqrt{1+x^2}=Ax+B$. **1608.** $y=C_1\cos n\varphi+C_2\sin n\varphi$; $\sin\varphi=x$. **1609.** $y=C_1\cos m\varphi+C_2\sin m\varphi$; $\operatorname{tg}2\varphi=e^{2x}$. **1610.** $y=C_1\cos m\varphi+C_2\sin m\varphi$; $\varphi=\ln\cos x$. **1611.** $y=C_1e^{\frac{2}{x}}+C_2e^{-\frac{2}{x}}-\frac{1}{4x}$. **1612.** $y=(C_1e^x+C_2e^{-x}):x+\frac{1}{2}e^x$. **1613.** $C_1\frac{e^{ax}}{x}+C_2\frac{e^{-ax}}{x}-\frac{2}{a^2}$. **1614.** $y=C_1x\cos\frac{c}{x}+C_2x\sin\frac{c}{x}$. **1615.** $y=C_1xe^{\frac{c}{x}}+C_2xe^{-\frac{c}{x}}$. **1616.** $y=C_1\operatorname{ctg}x+C_2\operatorname{cosec}x$. **1617.** $y=C_1x+C_2x^2+\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ частный интеграл уравнения $x^2y''-2xy'+2y=\Phi(x)\int\frac{x^2Q(x)}{\Phi(x)}dx+C_0\Phi(x)$, $\Phi(x)=e^{\int x^2P(x)\,dx}$. **1618.** $y=Ae^x(x^2-3x+3)+Be^{-x}(x^2+3x+3)$. **1619.** $y=\sqrt{x(1-x)}\,[Au^k+Bu^{-k}]$; $u=\frac{x}{1-x}$; $k=\sqrt{\frac{1}{4}-\beta}$; или $y=\sqrt{x(1-x)}\,[A\cos(n\ln u)+B\sin(n\ln u)]$; $n=\sqrt{\beta-\frac{1}{4}}$; при $\beta=\frac{1}{4}$, $y=\sqrt{x(1-x)}\,[A+B\ln u]$. **1620.** $W_0y=\beta\left[y_2(x)\int_0^x y_1(\xi)\,d\xi-y_1(x)\int_0^x y_2(\xi)\,d\xi\right]$, где y_1 и y_2 линейно независимые интегралы однородного уравнения и $W_0=\begin{vmatrix} y_1 & y_2\\ y_1' & y_2'\end{vmatrix}$ при $x=0$. **1621.** $y=C_1x$; $z=C_2x$. **1622.** $y=C_1x$,

$z=C_2+x+y$. **1623.** $x^2+y^2=C_1$; $p^2+q^2=C_2$; $px+qy=C_3$.
1624. $\ln r - \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}=C_1$; $z=C_2r$; $r=\sqrt{x^2+y^2}$. **1625.** $(z-y)^2+2x=C_1$; $z^2-y^2=C_2$. **1626.** $z=C_1y$; $(x^2+y^2)\,y=Cx^2$. **1627.** $(y-x)\,z=C_1$; $(y-x)\,e^{\frac{z}{2(y-x)}}=C_2$. **1628.** $x+y+z=C_1$; $x^2+y^2+z^2=C_2$. **1629.** $y=C_1x$; $z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=C_2$. **1630.** $x-y=C_1$; $z-t\,(x-y+1)=C_2$; $y-\ln(z-t)=C_3$. **1631.** $x^2+y^2+z^2=C_1y$; $z=C_2y$. **1632.** $x^2+y^2=C_1$; $(x+y)\,(x+y+z)=C_2$. **1633.** $z=x-y$; $y\,(y-2x)^3=(x-y)^2$.
1634. $x=s\sin\alpha+\dfrac{ds}{d\alpha}\cos\alpha$; $y=-s\cos\alpha+\dfrac{ds}{d\alpha}\sin\alpha$; $\dfrac{d^2s}{d\alpha^2}-\dfrac{ds}{d\alpha}+s=0$.
1635. $b\,(x+C_1)=+a^2\sin\varphi$; $b\,(y+C_2)=-a^2\cos\varphi$; $a\varphi=bt+C_3$.
1636. $y=(A-B+Bx)\,e^{-2x}$; $z=(-A-Bx)\,e^{-2x}$; $A=-1$; $B=-2$.
1637. $x=(A\cos t+B\sin t)\,e^{-6t}$; $y=[(A+B)\cos t-(A-B)\sin t]\,e^{-6t}$; $A=1$; $B=0$.
1638. $x=Ae^{-t}+Be^{2t}+Ce^{-2t}$; $y=Ae^{-t}+Be^{2t}-Ce^{-2t}$; $z=-Ae^{-t}+2Be^{2t}$; $3A=6B=2C=1$. **1639.** $x=-e^{-t}$; $y=e^{-t}$; $z=0$. **1640.** $y=Au+Bv$; $7z=(B\sqrt{3}-2A)\,u-(A\sqrt{3}+2B)\,v$; $u=e^{-\frac{x}{2}}\cos\dfrac{x\sqrt{3}}{2}$; $v=e^{-\frac{x}{2}}\sin\dfrac{x\sqrt{3}}{2}$.
1641. $x=A\cos t+B\sin t$; $2y=(A-B)\cos t+(A+B)\sin t+Ce^t$; $2z=-Ce^t+(A+B)\cos t-(A-B)\sin t$. **1642.** $x=Ae^t+\alpha_2Be^{\alpha_1t}+\alpha_1Ce^{\alpha_2t}$; $y=Ae^t+\alpha_1Be^{\alpha_2t}+\alpha_2Ce^{\alpha_1t}$; $z=Ae^t+\alpha_1Be^{\alpha_1t}+\alpha_2Ce^{\alpha_2t}$; $\alpha_1^2+\alpha_1+1=0$, $\alpha_2^2+\alpha_2+1=0$, $\alpha_2\neq\alpha_1$. **1643.** $x=A+Bu+Cv$; $2y=4A-(B-C\sqrt{5})\,u-(C+B\sqrt{5})\,v$; $2z=4A-(B+C\sqrt{5})\,u+(B\sqrt{5}-C)\,v$; $u=\cos t\sqrt{5}$; $v=\sin t\sqrt{5}$. **1644.** $x=e^{mt}(A\cos mt+B\sin mt)+e^{-mt}(C\cos mt+D\sin mt)$; $y=e^{mt}(A\sin mt-B\cos mt)+e^{-mt}(D\cos mt-C\sin mt)$. **1645.** $z=A\cos t+B\sin t$; $x+3y-3z=Ct+D$; $x-y+z=E\cos 2t+F\sin 2t$. **1646.** $x+y+z=Ae^t$; $x-y=Be^{-2t}$; $y-z=Ce^{-2t}$. **1647.** $x+y+z=Ae^t+Be^{-t}$; $x-y=C\cos t\sqrt{2}+D\sin t\sqrt{2}$; $y-z=E\cos t\sqrt{2}+F\sin t\sqrt{2}$.
1648. $y=17-2(A+B+Bx)\,e^x-2\,(C-D+Dx)\,e^{-x}$; $z=-12+(A+Bx)\,e^x+(C+Dx)\,e^{-x}$. **1649.** $2x=(t+A)\,e^t+(-t+B)\,e^{-t}$; $2y=(t+A+1)\,e^t+(t-B-1)\,e^{-t}$. **1650.** $x=2Ae^{-4t}+Be^{-7t}+\dfrac{7}{40}e^t+\dfrac{1}{27}e^{2t}$; $y=Ae^{-4t}-Be^{-7t}+\dfrac{1}{40}e^t+\dfrac{7}{54}e^{2t}$. **1651.** $y=Ae^{2x}+Be^{-2x}+\dfrac{3}{a^2-4}e^{ax}$; $z=Ae^{2x}-\dfrac{1}{3}Be^{-2x}+\dfrac{a+1}{a^2-4}e^{ax}$. **1652.** $x=A\,(1+2t)-2B-2\cos t-3\sin t$; $y=-At+B+2\sin t$. **1653.** $8y=e^x+(8-2A+3B-2Bx)\,e^{-x}$; $8z=(3x+C)\,e^x+(A+Bx)\,e^{-x}$. **1654.** $y=-x^2+C_1e^{2x}+C_2e^{-3x}$; $z=2x^2+2x-C_1e^{2x}+4C_2e^{-3x}$. **1655.** $y=C+Dx^2-x+(6B+A-1)\ln\sqrt{x}+B\ln^2x$; $y+z=A+C\ln x$. **1656.** $x=Ae^{n^2t}+Be^{-n^2t}+\dfrac{n+1}{n\,(n^2+1)}\sin nt$; $y=-Ae^{n^2t}+Be^{-n^2t}+\dfrac{n-1}{n\,(n^2+1)}\cos nt$.

1657. $y = x - \alpha_1 C_1 e^{-\alpha_2} - \alpha_2 C_2 x^{-\alpha_1}$; $z = C_1 x^{\alpha_2} + C_2 x^{\alpha_1}$; $\alpha_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$; $\alpha_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. **1658.** $y = -\frac{1}{6} x^2 \ln^2 x + \frac{1}{9} x^2 \ln x + Ax^{-1} + Bx^2$; $z = 1 - y'$. **1659.** $tx = A \cos t + B \sin t$; $t^2 y = C + (At + 2B) \cos t + (Bt - 2A) \sin t$. **1660.** $x + y = C_1 e^t$; $3xt^2 = t^3 + C_2$. **1661.** $x = u \cos t + v \sin t$; $y = u \sin t - v \cos t$; $u = (At + B) \cos \frac{t\sqrt{5}}{3} + (Ct + D) \sin \frac{t\sqrt{5}}{3}$; $v = -(Ct\sqrt{5} + D\sqrt{5} - 2A) \cos \frac{t\sqrt{5}}{3} + (At\sqrt{5} + B\sqrt{5} + 2C) \sin \frac{t\sqrt{5}}{3}$. **1663.** $ux = Ae^t + Be^{-t}$; $uy = Ae^t - Be^{-t}$; $uz = Ae^t - Be^{-t} + C$; $u = -Ae^t - Be^{-t} - Ct + D$. **1664.** $ux = Ae^t$; $uy = Be^t + Ce^{-t}$; $uz = Be^t - Ce^{-t}$; $u = -(A + B)e^t + Ce^{-t} + D$.

1665. $x = (At + B)e^t + 8t + 30$; $y = -\left(At + \frac{A}{4} + B\right)e^t - 4t - 21$.

1666. $u = A + Bt + C_1 e^t + C_2 e^{-t} + \frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{6} t^3$; $x = (D^2 - D + 2)u$; $y = -(D^2 - D + 6)u$ (см. стр. 118). **1667.** $x = (A + Bt + Ct^2)e^t$; $y = (D + Et + Ft^2)e^t$; $z = [F - (2C + E)t - Ct^2]e^t$. **1668.** $x = A \sin(t + \alpha) + C \sin(2t + \gamma)$; $y = B \sin(t + \beta) + C \sin(2t + \gamma)$; $3z = -A \sin(t + \alpha) - 3C \sin(2t + \gamma) - 3B \sin(t + \beta)$. **1669.** $x = A \sin(at + \alpha)$; $y = B \sin(at + \beta)$; $z = Ct + D$. **1672.** Если v — скорость и α — угол вектора скорости с Ox, то $v^{-n} = \frac{\cos^n \alpha}{v_0^n \cos^n \alpha_0} - nk \cos^n \alpha \int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\cos^{n+1} \alpha}$; $gt = -\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{v\, d\alpha}{\cos \alpha}$; $gx = -\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} v^2\, d\alpha$; $gy = \int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} v^2 \operatorname{tg} \alpha\, d\alpha$.

1673. $x = \frac{b}{\omega} + \frac{p}{\omega^2} + A \sin(\omega t + \alpha)$; $y = \frac{a}{\omega} - \frac{pt}{\omega} + A \cos(\omega t + \alpha)$; $z = \frac{1}{2} rt^2 + ct$, где $mp = e\frac{\partial V}{\partial x}$; $mr = e\frac{\partial V}{\partial z}$; $m\omega = -eH = -\frac{\partial V}{\partial z}$; $\frac{\partial V}{\partial y} = 0$; a, b, c — проекции начальной скорости. **1674.** Траектория — геодезическая линия конуса $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = Ax + By + Cz$. **1675.** $z = \sin y + F(\sin x - \sin y)$. **1676.** $4xyz = -x^4 - 2x^2 + F(xy)$. **1677.** $z^2 = 2x + F\left(\frac{y}{x}\right)$. **1678.** $3xyz = y^3 + F(xy)$. **1679.** $\sqrt{R^2 - z^2} = y + xF(z)$. **1680.** $z = xy + xF\left(\frac{y}{x}\right)$. **1681.** $\ln z = \frac{a}{y} + F(x^2 + y^2)$. **1682.** $z = a \sin\left[xy + F\left(\frac{y}{x}\right)\right]$. **1683.** $z = yF(x^2 - y^2)$. **1684.** $z[y - xF(y)] = y^2 F(y) + xy$. **1685.** $4z^5 = 5x^2y^2 + F\left(\frac{y}{x}\right)$. **1686.** $z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = x^{a+1} F\left(\frac{y}{x}\right)$. **1687.** $z + x^2 + y^2 = xF\left(\frac{y}{x}\right)$. **1688.** $x^2 + y^2 + z^2 = yF\left(\frac{z}{y}\right)$. **1689.** $z = x^3y^3 F\left(\frac{x^3 + y^3}{x^2 y^4}\right)$.

1690. $z = yF\left(\frac{y^3}{x^2} + y\right)$. **1691.** $z = e^{-y}F\left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right)$. **1692.** $z = rF(\ln r + \varphi)$; $x \operatorname{tg} \varphi = y$; $r^2 = x^2 + y^2$. **1693.** $z + u \ln u = uF(z + y)$; $u = x + y + z$. **1694.** $(x - y)(x + y + z) = F\left(\frac{z - y}{x - y}\right)$. **1695.** $\ln y + \frac{z}{x} = F\left(\ln x + \frac{z}{y}\right)$. **1696.** $y + ze^{-x} = F(x + ze^{-y})$. **1697.** $y + z + u = x^2F[x(y - z),\ x(y - u)]$. **1698.** $12u = x^4 - 2x^3(y + z) + 6x^2yz + F(y - x;\ z - x)$. **1699.** $u = \frac{xy}{z}\ln x + xF\left(\frac{y}{x};\ \frac{z}{x}\right)$. **1700.** $u = x^2 \ln x + x^2F\left(\frac{y}{x};\ \frac{z}{x}\right)$. **1701.** $u = F[2yz + ax(y + \sqrt{1 - y^2}),\ xe^{\arcsin y}]$. **1702.** $\Phi\left[(x-y)\sqrt[3]{s};\ (y-u)\sqrt[3]{s};\ (z-u)\sqrt[3]{s}\right]=0$. **1703.** $z^2 = xy + F\left(\frac{y}{x}\right)$. **1704.** $z = e^{mx}\cos(py + \alpha) + F(y + ax)$; $m \operatorname{tg} \alpha = ap$. **1705.** $12u = 6x^2yz - 2x^3(bz + cy) + bcx^4 + F(y - bx,\ z - cx)$. **1706.** $z^a = \sin y\, F(y - a \sin x)$. **1707.** $4z = (u + y)x - 2x(u - y)\ln x + F\left(\frac{y + u}{x}\right)$; $u^2 = 1 + y^2$. **1708.** $z = a \sin\left[xy + F\left(\frac{y}{x}\right)\right]$. **1709.** $x^2 + y^2 + z^2 = F(ax + by + z)$. **1710.** $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0$. **1711.** $l\frac{\partial u}{\partial x} + m\frac{\partial u}{\partial y} + n\frac{\partial u}{\partial z} = 0$. **1712.** $z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ уравнение поверхности; $axz = x^2 + y^2$ уравнение конуса, проходящего через заданную линию. **1713.** $nx - lz = F(ny - mz)$; $(nx - lz + l)^2 + (ny - mz + m)^2 = n^2a^2$. **1715.** $z^2 + xy = a^2 + h^2$. **1716.** $2xyz - x^2 = 2$. **1717.** $z^2 = x^2 - y^2$. **1718.** $z^2 = 2xy - 2(x + y - 1) + (x + y - 1)^4$. **1719.** $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 2a^2(x^2 + y^2 + xy)$. **1720.** $(x^2 + y^2)(a^2z^2 - h^2y^2) = a^2hx^2z$. **1721.** $z^2 + 2x^2 = F(x^2 - y^2)$. **1722.** $z^2 - x^2 = F(x^2 - y^2)$. **1723.** $z(x^2 + y^2 + z^2) = h(z^2 + 2y^2)$. **1724.** $x^2 + y^2 + 2z^2 = a^2 + 2h^2$. **1725.** $z = x^2y$. **1726.** 1) $x = C$; $z = x^2y$; 2) $xy^2 = C$; $z = x^2y$. **1727.** $z^2 = xy$. **1728.** $(z^{2\sigma} - 1)(2^\sigma - 1) = 2^\sigma y^{2\sigma} - x^{2\sigma}$, где $\sigma = \frac{1 - n}{2}$; $n \neq 1$. При $n = 1$ поверхности нет. При $n = -1$, $z^2 = 1 - x^2 + 2y^2$. **1729.** Меридианы и параллели. **1730.** $z(x^2 + y^2 + z^2) = 2a(x - 2a)^2$, окруж. $x^2 + y^2 + z^2 = 2aC^2z$; $2a - x - Cz = 0$. **1731.** $a^2x^2 = 4z(z - x)(x^2 + y^2)$. Ортогональные траектории получаются при пересечении с поверхностями $(2x^2 + y^2)z^2 = C^2x^2$. **1732.** $x(x^2 + y^2 + z^2) = 2a(x^2 + y^2)$. **1733.** $\operatorname{ch} x = z^2F\left(\frac{z^2}{y}\right)$. **1734.** 1) $y^2 \operatorname{ch}\frac{z^2}{y} = z^2 \operatorname{ch} x$; 2) $2my = z^2 + 2am \operatorname{ch} x$; 3) $y = F\left(\frac{z^2}{y}\right)\operatorname{ch} x$, причем $F(0) = \alpha$. Данная линия — характеристика. **1735.** $z^2 = 2x^3y$; ортогональные траектории $x^2 + (3 \pm 2\sqrt{3})y^2 = C$. **1736.** $(x - z)^2 + (y + \sqrt{a^2 - z^2})^2 = a^2$. **1737.** Уравнение линий стока $4a^2(x\,dx + y\,dy)^2 = (x^2 + y^2)^2(dx^2 + dy^2)$. Интегрируется в полярных координатах. **1738.** $z = axy(x^2 - y^2)$. **1739.** $x^2 + y^2 + 4z^2 = F(x^4 + y^4 - 6x^2y^2)$. **1740.** $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = y^2 - z^2$. **1741.** $z = C \pm a\varphi$; $x \operatorname{tg} \varphi = y$. **1742.** $x^2 + y^2 +$

$+z^2 = xF\left(\frac{y}{x}\right)$. **1743.** $y = xF(zx^{n-1})$. **1744.** Нет решения. **1745.** 2. **1746.** 16. **1747.** $\frac{1-\cos\pi a}{a}$. **1748.** $\ln 2$. **1749.** $\frac{\pi}{4}$. **1750.** $\frac{\pi}{3}$. **1751.** $4e^{-1}$.

1777. Сходится абсолютно. **1778.** Расходится. **1779.** Расходится. **1780.** Сходится при $n>1$. **1781.** Сходится при $n>-1$. **1782.** Сходится при $-1<\sigma<1$. **1783.** Расходится. **1784.** Сходится при $\left|\frac{m+1}{n}\right|<1$. Сходится абсолютно при $-1<\frac{m+1}{n}<0$. Иначе: при $0\leqslant\frac{m+1}{n}<1$ сходится неабсолютно; при $-1<\frac{m+1}{n}<0$ сходится абсолютно. **1785.** Сходится, если $m>-1$; $n>-1$. **1786.** Сходится при $a>0$; $n>-1$. **1787.** Расходится, но имеет главное значение. **1788.** Расходится. **1789.** Сходится. **1790.** Сходится лишь при $n>1$. **1791.** Сходится при любом n. **1792.** Сходится. **1826.** $(n-1)!$. **1827.** $\frac{(p-1)!\,(q-1)!}{(p+q-1)!}$. **1828.** $\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n-3}+\ldots+(-1)^{n-1}+(-1)^n\frac{\pi}{4}$. **1829.** $2^{2n}\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$. **1830.** $\frac{\pi}{2a^{2n-1}}\times\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-3)}{2\cdot4\cdot6\ldots(2n-2)}$. **1831.** $\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-3)}{2\cdot4\cdot6\ldots(2n-2)}\cdot\frac{\pi A^{n-1}}{(AC-B^2)^{n-\frac{1}{2}}}$.

1832. $\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots2n}\frac{\pi}{2}$. **1833.** $\frac{2\cdot4\cdot6\ldots2n}{1\cdot3\cdot5\ldots2n+1}$. **1834.** $\frac{1}{2}\frac{n!\,m!}{(n+m+1)!}$.

1835. $\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2^n}\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. **1837.** $(-1)^n\frac{n!}{(m+1)^{n+1}}$. **1838.** $\frac{n!}{2^{\frac{n+1}{2}}}\sin\frac{\pi(n+1)}{4}$.

1839. $\frac{n!}{2^{\frac{n+1}{2}}}\cos\frac{\pi(n+1)}{4}$. **1840.** $(-1)^n u_{2n+2}=\ln\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}-\sqrt{2}\left(1-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\ldots+\frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{2n+1}\right)$; $(-1)^{n-1}u_{2n+1}=-\frac{\pi}{4}+\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots\ldots\frac{1}{n-\cos^2\frac{n\pi}{2}}\right)$. **1841.** $(-1)^{n-1}\cdot\frac{\pi}{2}$. **1842.** $\frac{1\cdot2\cdot3\ldots2n}{a(a^2+2^2)(a^2+4^2)\ldots(a^2+4n^2)}$.

1843. $\frac{1\cdot2\cdot3\ldots(2n+1)}{(a^2+1)(a^2+3^2)\ldots[a^2+(2n+1)^2]}$.

1844. $\frac{1\cdot2\cdot3\ldots(2n+1)}{(m^2+1^2)(m^2+3^2)\ldots[m^2+(2n+1)^2]}2\operatorname{ch}\frac{m\pi}{2}$. **1845.** $(-1)^{n-1}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\times\left[\frac{1}{2}-e^{-\frac{1}{a}}+e^{-\frac{4}{a}}-\ldots+(-1)^n e^{-\frac{n^2}{a}}\right]$. **1847.** $(-1)^{m-1}\frac{\pi}{4m}$.

1848. 0,74682. **1849.** 0,94608. **1850.** 0,20003. **1851.** 0,20000. **1852.** 0,20281.

1853. 1,00426. **1854.** 1,03065. **1855.** $2\pi a\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2 e^2-\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\frac{e^4}{3}-\right.$ $\left.-\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2\frac{e^6}{5}-\ldots\right]$. **1857.** $-\frac{\pi^2}{8}$. **1858.** $\frac{\pi^2}{4}$. **1859.** $\frac{\pi^2}{12}$. **1860.** $-\frac{\pi^2}{6}$.

1861. $\frac{\pi^2}{6}$. **1862.** $\frac{\pi^2}{12}$. **1863.** $\frac{\pi^2}{8a^2}$. **1864.** $4\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)^3}=\frac{\pi^3}{8}$. **1871.** $\frac{\pi a^m}{1-a^2}$.

1872. $\frac{\pi}{2}a^{m-1}$. **1873.** $\frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}\left(\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}\right)^m$. **1874.** $\frac{2\pi^2}{\sqrt{1-a^2}}\left(\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}\right)^m$.

1875. $\frac{\pi}{a}\ln(1+a)$. **1876.** 0 при $a^2<1$; $\pi\ln a^2$ при $a^2>1$. **1877.** 0.

1878. $-\frac{\pi}{m}a^m$ при $a^2\leqslant 1$; $-\frac{\pi}{ma^m}$ при $a^2\geqslant 1$. **1879.** $-\frac{\pi}{2}\ln 2$.

1880. $-\frac{\pi^2}{2}\ln 2$. **1881.** $-\frac{\pi}{4m}$. **1882.** Если $\frac{n}{m}=\frac{\lambda}{\mu}$ несократимая дробь, то $\pi\frac{1+a^\lambda b^\mu}{1-a^\lambda b^\mu}$. **1883.** $\frac{\pi}{2(1-ab)}$. **1884.** $\frac{\pi}{2}\left(\ln^2 2+\frac{\pi^2}{12}\right)$.

1885. $\frac{\pi}{2(1-a^2)}\frac{1-ae^{-|m|}}{1+ae^{-|m|}}$. **1886.** $\frac{\pi\operatorname{sign} a}{2(a+e^{|m|})}$. **1887.** $\pi\ln\left(1-\frac{a}{e}\right)$, если $|a|<1$. **1892.** $\frac{(n-1)!}{a^n}$. **1893.** $\frac{\pi}{2a^{2n-1}}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n-2)}$.

1894. $\sqrt{\pi}(\sqrt{b}-\sqrt{a})$. **1895.** $\frac{\pi}{2}(b-a)$, если $a>b>0$. **1896.** $A\ln\frac{\delta}{\alpha}+$ $+B\ln\frac{\delta}{\beta}+C\ln\frac{\delta}{\gamma}$. **1897.** $2\alpha\ln 2\alpha+2\beta\ln 2\beta-2(\alpha+\beta)\ln(\alpha+\beta)$.

1898. $\operatorname{arctg}\frac{\beta}{m}-\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{m}$. **1899.** $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}e^{-2\sqrt{a}}$. **1900.** $\sqrt{\pi}(b-a)$.

1901. $\frac{1}{4}\ln\left(1+\frac{4b^2}{a^2}\right)$. **1902.** $b\operatorname{arctg}\frac{2b}{a}-\frac{a}{4}\ln\left(1+\frac{4b^2}{a^2}\right)$. **1903.** $\frac{b\sqrt{\pi}}{2a^3}e^{-\frac{b^2}{a^2}}$.

1904. $(-1)^n\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}}\frac{d^{2n}}{d\beta^{2n}}e^{-\beta^2}$. **1905.** $\frac{\pi b}{2}-\sqrt{\pi a}$. **1906.** $\frac{\pi}{b}\ln(a+b)$, если $a>0$, $b>0$. **1907.** $\pi(\sqrt{1-a^2}-1)$. **1908.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\alpha\cdot\ln(1+\alpha^2)$, если $\alpha>0$.

1909. $\pi\ln\frac{1+\sqrt{1-\alpha}}{2}$. **1910.** $-(\arcsin\alpha)^2$. **1911.** $\pi\ln\frac{m+1}{2}$, считая $m>0$.

1912. $\pi\arcsin a$. **1913.** $\frac{\pi^2}{8}-\frac{(\arccos a)^2}{2}$. **1914.** $\frac{\pi}{2}\ln(1+a)$, если $a>0$.

1915. $\frac{\pi}{2}\ln\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)$, если $\alpha>0$, $\beta>0$. **1916.** $\frac{\pi}{2}[(\alpha+\beta)\ln(\alpha+\beta)-$ $-\alpha\ln\alpha-\beta\ln\beta]$, если $\alpha>0$, $\beta>0$. **1917.** $\frac{\pi}{2}[(\alpha^2-\beta^2)\ln(\alpha+\beta)-\alpha^2\ln\alpha+$ $+\beta^2\ln\beta+\alpha\beta]$, если $\alpha>0$, $\beta>0$. **1918.** $2\pi[(a+b)\ln(a+b)-a\ln a-b\ln b]$, если $a>0$, $b>0$. **1919.** $-\frac{\pi}{2}(a+b)$, если $a>0$, $b>0$. **1929.** $\frac{\pi}{2}$. **1930.** $\frac{\pi}{4}$. **1931.** $\frac{\pi}{4}$. **1932.** $\frac{3}{4}\ln 3$. **1933.** $\ln 2$. **1934.** $\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$. **1935.** $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$. **1936.** $\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10\ldots(3n-2)}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 12\ldots 3n}\frac{\pi}{\sqrt{3}}$. **1937.** $\frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}}$. **1938.** $\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{4\sqrt{2\pi}}$. **1939.** $\frac{\pi}{2\sin a\pi}$. **1940.** $\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$. **1941.** $\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n)}$. **1942.** $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}}\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)\Gamma\left(p-\frac{m+1}{n}\right)}{na^p\Gamma(p)}$. **1943.** $\frac{\pi}{2\sin\pi a}$. **1944.** $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$. **1945.** $\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}$. **1946.** $\frac{2^{n-1}\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)}{(1-k^2)\Gamma(n)}$. **1947.** $\pi\operatorname{ctg}\pi a$ (можно рассмотреть как $\lim\limits_{\alpha\to+0}\int\limits_0^1\frac{x^{a-1}-x^{-a}}{(1-x)^{1-\alpha}}dx$). **1948.** $\frac{1}{a^\beta(1+a)^\alpha}\cdot\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$. **1949.** $\ln\frac{\operatorname{tg}\frac{a\pi}{2}}{\operatorname{tg}\frac{b\pi}{2}}$. **1950.** $\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}$. **1951.** $\frac{\pi(1-a)}{\sin a\pi}$. **1952.** $\frac{\pi^2\sin\frac{a\pi}{2}}{4\cos^2\frac{a\pi}{2}}$. **1953.** $\frac{\pi^2}{8}\frac{1+\sin^2\frac{a\pi}{2}}{\cos^3\frac{a\pi}{2}}$. **1954.** $\frac{\pi}{2\nu}\operatorname{tg}\frac{\pi\mu}{2\nu}$. **1955.** $\frac{\pi}{2\nu\cos\frac{\mu\pi}{2\nu}}$. **1956.** $\ln\sqrt{2\pi}$. **1957.** $a\ln a-a+\ln\sqrt{2\pi}$. **1963.** $\frac{a^2}{2n}\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}$. **1964.** $\frac{a^3}{3n^2}\frac{\Gamma^3\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}$. **1965.** Справедливо только, если a и b одного знака. **1966.** Когда $a<0$ и $b>0$. **1967.** Указание: $\int\limits_{k\pi}^{(k+1)\pi}(\sin^2 x)^{x^3}x^\alpha dx<\int\limits_{k\pi}^{(k+1)\pi}(\sin^2 x)^{(k\pi)^3}(k\pi+\pi)^\alpha dx$. **1991.** Неравенство, противоположное неравенству задачи 1990. **2002.** $\frac{3\pi}{8\sqrt{2}}$. **2003.** $\frac{4\pi}{9\sqrt{3}}-\frac{1}{3}$. **2004.** $\frac{\pi}{2}$. **2005.** $\frac{a\pi}{2}$. **2006.** a. **2007.** $\frac{\pi}{2}\ln(1+\sqrt{2})$. **2008.** $\frac{\sqrt{\pi}}{a}e^{b^2}$. **2009.** $\frac{\pi}{b}e^{-b\alpha}\cos a\alpha$, если $b>0$, $\alpha>0$. **2010.** $\frac{\pi}{b}e^{-b\alpha}\sin a\alpha$, если $b>0$, $\alpha>0$.

2011. $\frac{\pi}{2}e^{-\alpha}\operatorname{ch}\beta$, если $\alpha>\beta>0$. **2012.** $\frac{\sqrt{\pi}}{4}ae^{-\frac{a^2}{4}}$. **2013.** $\frac{\pi-\alpha}{2\sin\alpha}$; $0\leqslant\alpha\leqslant\pi$.

2014. $-\frac{1}{2}$. **2015.** $\frac{\pi}{2b}$; $b>0$. **2016.** $\frac{\pi}{(\lambda-1)\sin(\lambda-1)\pi}$, если $1<\lambda<2$.

2017. $\sqrt{(n-1)\pi}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$, если $n>1$. **2018.** $\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\frac{\Gamma^3\left(\frac{1}{3}\right)}{\sqrt[3]{\alpha(1-\alpha)}}$.

2019. $\ln\frac{1+a}{1+b}$, если $a>-1$, $b>-1$. **2020.** $\ln\frac{b}{a}$. **2021.** $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{a+b}{a-b}\right|$.

2022. $\frac{\pi}{2}\ln\frac{a}{b}$. **2023.** $-a\ln a$. **2024.** $a\ln a-a$. **2025.** $\frac{\pi}{2}|a|$.

2026. $\frac{\pi(|a|+1)}{4}e^{-|a|}$. **2027.** $\frac{\pi}{4}\frac{1-e^{-2a}}{a}$; $a>0$. **2028.** $\frac{\pi}{3}|a|^3$.

2029. $\frac{\pi b}{2}$. **2030.** $\frac{\pi}{4}(2-a)$ при $a<2$; 0 при $a>2$. **2031.** $\frac{\pi}{4}$ при $0<a<1$; $-\frac{\pi}{8}$ при $1<a<3$; 0 при $a>3$. **2032.** $\frac{\pi a}{2}-\frac{\pi a^2}{8}$ при $0\leqslant a<2$; $\frac{\pi}{2}$ при $a\geqslant 2$. **2033.** $\frac{\pi}{4}$. **2034.** $\frac{\pi}{4}$. **2035.** $\frac{\pi}{2\operatorname{ch}\frac{m\pi}{2}}$. **2036.** $\frac{e-1}{2e}\sqrt{\pi}$.

2037. $\frac{\ln a}{2a^n}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)^2}{\Gamma(n)}$; $a>0$. **2038.** $\frac{\pi a}{4}e^{-a}$; $a>0$. **2039.** $\pi\left(e^{-a}-\frac{1}{2}\right)$; $a>0$.

2040. $\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\frac{b-\sqrt{b^2-a^2}}{a}$. **2041.** $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$. **2042.** $\frac{\pi^2}{2\sqrt{2}}$. **2043.** $\frac{2\pi^2}{\sqrt{1-a^2}}$.

2044. 0. **2045.** $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. **2046.** $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+3}{4}\right)}$, если $\alpha>-1$.

2047. $\frac{\pi\cos\alpha}{\sqrt{2\cos^3 2\alpha}}$. **2048.** $\ln\sqrt{1+a^2}$. **2049.** $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$. **2061.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$.

2062. $\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$. **2063.** $\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$.

2064. $2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}$. **2065.** $\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(4n-3)(4n-1)}+$
$+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(4n-3)(4n-2)(4n-1)}$. **2066.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$,

2067. $\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2}$. **2068.** $\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin 2nx}{4n^2-1}$.

2069. $\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}$. **2070.** $\frac{2\sin\pi a}{\pi}\left[\frac{1}{2a}+\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{a\cos nx}{n^2-a^2}\right]$.

2071. $\frac{2\sin\pi a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n\sin nx}{n^2-a^2}$. **2072.** $\frac{1}{4}-\frac{\cos 2x}{4}+\frac{4}{\pi}\left[\frac{\sin x}{3}-\right.$ $\left.-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}\right]$. **2073.** $\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\pi x}{n}$.

2074. $\frac{1}{4}-\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)2\pi x}{(2n+1)^2}$. **2075.** $\frac{2}{3}-\frac{9}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{2n\pi x}{3}}{n^2}+$ $+\frac{1}{2\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos 2m\pi x}{m^2}$. **2076.** $\frac{1}{h}\operatorname{sh}h+2h\operatorname{sh}h\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{h^2+n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{h}-$ $-2\pi\operatorname{sh}h\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{h^2+n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{h}$. **2077.** $\frac{2\operatorname{sh}a\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2a}+a\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{a^2+n^2}\right]$.

2078. $\frac{2\operatorname{sh}a\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n\sin nx}{a^2+n^2}$. **2079.** $\frac{\pi^3}{4}+6\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx+$ $+\frac{24}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^4}$. **2080.** $2\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sin nx}{n}+12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\sin nx$.

2081. $\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}$. **2082.** $\frac{a^3}{12}-\frac{a^3}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{2n\pi x}{a}}{n^2}-\frac{3a^3}{2\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{2n\pi x}{a}}{n^3}$.

2083. $\frac{a^3}{24}-\frac{a^3}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{a}-\frac{12a^3}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\frac{\pi x}{a}}{(2n-1)^4}$.

2084. $\frac{4a^3}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)\frac{\pi x}{a}}{(2n-1)^3}-\frac{3a^3}{2\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\frac{\pi x}{a}}{n^3}$. **2085.** $\frac{a}{2}+\frac{a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\frac{\pi x}{a}}{n}$.

2086. $\frac{a}{2}-\frac{4a}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\frac{\pi x}{a}}{(2n-1)^2}$. **2087.** $\frac{2a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin\frac{n\pi x}{a}$.

2088. $\frac{8a}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\sin(2n-1)\frac{\pi x}{2a}$.

2095. $f\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$; $b_n=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin(2n+1)x\,dx$.

2136. $x^3=\frac{3}{4}T_1(x)+T_3(x)$.

2137. $\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{2^{2m+1}}{2m+1}T_{2m+1}(x)$.

2138. $\frac{2}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{2n}}{4n^2-1}T_{2n}(x)$.

2139. $T_{2n}(x)+\frac{C_{2n}^1}{2^2}T_{2n-2}(x)+\frac{C_{2n}^2}{2^4}T_{2n-4}(x)+\ldots+\frac{C_{2n}^n}{2^{2n}}T_0(x)$.

2140. $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(4n-1)(2n-2)!}{2^{2n}n!(n-1)!}P_{2n-1}(x)$.

2141. $\frac{1}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(4n+1)(2n-2)!}{2^{2n}(n-1)!(n+1)!}P_{2n}(x)$.

2142. $\frac{1}{1+a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{1+a}\right)^n L_n(x)$;

2143. $\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k(n!)^2}{(n-k)!\,k!}L_k(x)$.

2144. $\sum_{n=0}^{\infty}B_nL_n(x)$. $B_n=\frac{1}{2i}\left[\frac{(ai)^n}{(1+ai)^{n+1}}-\frac{(-ai)^n}{(1-ai)^{n+1}}\right]$.

2145. $\sum_{n=0}^{\infty}A_nL_n(x)$ $A_n=\frac{1}{2}\left[\frac{(ai)^n}{(1+ai)^{n+1}}+\frac{(-ai)^n}{(1-ai)^{n+1}}\right]$.

2146. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2n!}{\sqrt{2\pi}\,2^{n-1}\,n!}H_{2n+1}(x)$.

2147. $\frac{2}{\sqrt{2\pi}}H_0(x)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2n!}{\sqrt{2\pi}\,2^{n-1}\,n!}H_{2n+2}(x)$.

2148. $e^{\frac{a^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}a^nH_n(x)$.

2149. $e^{-\frac{a^2}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a^{2k}H_{2k}(x)$.

2150. $e^{-\frac{a^2}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k-1}a^{2k+1}H_{2k+1}(x)$.

2151. $\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{m}{m^2+u^2}\cos ux\,du$.

2152. $\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{u}{m^2+u^2}\sin ux\,du$.

2153. $\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{m^2+u^2}}\sin(ux+\varphi_u)\,du$, где $\varphi_u=\operatorname{arctg}\frac{m}{u}$.

2154. $\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\tau u}{u}\cos xu\,du$.

2155. $\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1-\cos u}{u}\sin xu\,du$.

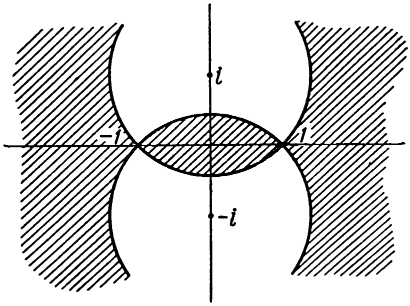
2156. $\frac{2A}{\pi a}\int\limits_0^\infty \frac{1-\cos au}{u}\cos u(x-x_0)\,du$. **2157.** $\frac{\omega}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{(k^2+\omega^2-u^2)\cos ux+2ku\sin ux}{(k^2-\omega^2+u^2)^2+4k^2\omega^2}\,du$.

2158. $\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\sin\frac{n\pi u}{2}\sin\left(x-\frac{n\pi}{2}\right)u}{u^2-1}\,du$, если n четное; $-\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\cos\frac{n\pi u}{2}\cos\left(x-\frac{n\pi}{2}\right)u}{u^2-1}\,du$, если n нечетное. **2159.** Логарифмическая спираль при $a \neq 0$, окружность при $a=0$. **2160.** При $a\neq 0$, циклоида, удлиненная или укороченная соответственно $a=b$, $a<b$, $a>b$. **2161.** Эллипс. **2162.** Парабола. **2163.** Развертка круга. **2164.** Полуплоскость $x>1$. **2165.** Замкнутый круг. **2166.** Внутренность лемнискаты. **2167.** Окружность. **2168.** При соответствующем определении аргумента область вне круга $(x+1)^2+y^2=2$ при $x<0$. **2169.** -7. **2170.** $-7{,}3151+1{,}0427i$. **2171.** $-3{,}1658+1{,}9596i$. **2172.** $(0{,}18347+0{,}98306i)\,286751^n$, n — любое целое число. **2173.** $(0{,}08428+0{,}18898i)\,e^{\pi n}$, n — любое целое число. **2174.** $-0{,}02839-1{,}02386i$. **2175.** $0{,}8047-2{,}6779i+2\pi ni$, n — любое целое число. **2179.** $\pm(\pi+2{,}9932i)+2\pi n$. **2180.** $\pi n+(-1)^n\left(\frac{\pi}{2}-1{,}4436i\right)$. **2181.** $\pi n+\left(\frac{\pi}{2}+0{,}5493i\right)$. **2188.** На прямых: а) $y=n\pi$; б) $y=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$. **2189.** а) На прямых $x=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$ и $y=0$; б) на прямых $x=n\pi$. **2190.** а) На прямых $x=n\pi$ и $y=0$; б) на прямых $x=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$. **2191.** На пучке окружностей, для которого точки $z_1=-\frac{b}{a}$ и $z_2=-\frac{d}{c}$ являются предельными точками. **2192.** На пучке окружностей, проходящих через точки $z_1=-\frac{b}{a}$ и $z_2=-\frac{d}{c}$. **2193.** $\operatorname{sh} y=\pm\sqrt{c^2-\sin^2 x}$. При $c=1$ это две линии, сходные с синусоидами, симметрично расположенные относительно Ox, при $c<1$ — овалы, расположенные внутри площадей, ограниченных линиями $c=1$; при $c>1$ волнистые линии, окаймляющие линии $c=1$. **2194.** а) Дуги окружностей между точками $+i$ и $-i$; б) окружности пучка с предельными точками $+i$ и $-i$. **2195.** а) Окружности $r=\frac{1}{c}\cos\varphi$; б) окружности $r=-\frac{1}{c}\sin\varphi$. **2196.** а) Эллипсы $\frac{x^2}{\left(\frac{\rho^2+1}{2\rho}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{\rho^2-1}{2\rho}\right)^2}=1$; б) гиперболы $\frac{x^2}{\cos^2\alpha}-\frac{y^2}{\sin^2\alpha}=1$. **2197.** Эллипсы $\frac{x^2}{\operatorname{ch}^2 u_0}+\frac{y^2}{\operatorname{sh}^2 u_0}=1$.

2198. $\operatorname{Re}\operatorname{arctg} e^{i\varphi}=\frac{\pi}{4}$; $\operatorname{Im}\operatorname{arctg} e^{i\varphi}=\frac{1}{2}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)$, считая $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$.

2199. а) Дуга окружности между -1 и $+1$; б) окружность

$\left(x-\frac{\rho_0^2+1}{\rho_0^2-1}\right)^2+y^2=\left(\frac{2\rho_0}{\rho_0^2-1}\right)^2$. **2200.** Если $\frac{1-z}{1+z}=\rho e^{i\theta}$, то точка z описывает дугу, вмещающую угол θ_0. Получим $\frac{1-w}{1+w}=\rho^2 e^{2i\theta_0}$, значит, w описывает дугу, вмещающую $2\theta_0$. **2201.** $[x^2+(y-1)^2-2][x^2+(y+$



К задаче 2201.

$+1)^2-2]>0$. См. чертеж. **2202.** 1) В правую полуплоскость; с разрезом; 2) вся плоскость (отрезок $(-1;\ 1)$ покрыт дважды); 3) внутренность эллипса $\left(\frac{u}{R+\frac{1}{R}}\right)^2+\left(\frac{v}{R-\frac{1}{R}}\right)^2=1$ с разрезом между фокусами $(-1;\ 1)$; 4) тот же эллипс с разрезом; 5) $\left(\frac{u}{\cos\alpha}\right)^2-\left(\frac{v}{\sin\alpha}\right)^2\leqslant 1$. Дуга $r=1$ переходит в вещественную ось гиперболы. **2203.** В первый квадрант, причем $z=0$, $w=0$; $z=1-\rho e^{i\varphi}$, $w\sim\frac{1}{\sqrt{2\rho}}e^{-\frac{i\varphi}{2}}$; $z=\infty$, $w=i$. Гиперболы с фокусами i, $-i$. **2204.** В верхнюю полуплоскость с надрезами $n\pi$; $n\pi+ai$. **2205.** $\frac{\pi}{2}$. **2206.** На внутренность эпициклоиды с площадью $\pi n(n+1)a^2$. **2207.** S_n — область внутри правого острого угла величиной $\frac{\pi}{n}$ с вершиной в точке $z=-n$ и со стороной на оси Ox; $\lim S_n$ — полоса шириной π, ограниченная $y=0$ и $y=\pi$. **2208.** $\left|w-\frac{a}{4}\right|<\frac{a}{4}$. **2209.** На верхнюю полуплоскость с разрезом $v=\pi$, $-\infty<u\leqslant -e$; при этом нижняя граница $y=0$ переходит в нижнюю границу $v=0$, $-\infty<u<\infty$, половина верхней границы $y=\pi$, $x<0$ в полупрямую $u=\pi$, $-\infty<u<-e$; другая половина верхней границы $y=\pi$, $x>0$ отображается на ту же полупрямую, проходимую в обратном направлении. **2210.** $w(z)=\frac{z^2}{2}(2-i)$. **2211.** $w(z)=z^3(1-2i)$. **2212.** $w(z)=\frac{1}{2}-\frac{1}{z}$.

2213. $w(z)=\dfrac{-1+i}{z}$. **2214.** $w(z)=ze^z$. **2215.** $w(z)=\operatorname{ctg} z$. **2216.** $w(z)=\alpha i\ln z+\beta i+\gamma$; α, β, γ — вещественные. **2217.** $w(z)=\alpha\sqrt{z}+\beta i+\gamma$; α, β, γ — вещественные. **2218.** $w(z)=\alpha i\ln z+\beta i+\gamma$; α, β, γ — вещественные. **2223.** $w(z)=\alpha\ln z+\beta i+\gamma$. **2224.** $w(z)=e^{\frac{\alpha}{z}+\beta i+\gamma}$. **2225.** $\ln w(z)=\dfrac{\alpha i}{z^2}+\beta i+\gamma$. **2226.** $w(z)=cz^{\alpha i}$. **2227.** $\ln w(z)=\alpha\sqrt{z}+\beta+\gamma i$. **2228.** $(A+Bi)(z\pm\sqrt{z^2-c^2})$. **2229.** $\ln w(z)=\alpha(1-ki)z+\beta i+\gamma$. **2233.** $z=\pm i$ — простые полюсы. **2234.** $z=0$; $z=\pm 1$ — простые полюсы. **2235.** $z=n\pi$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ простые полюсы; $z=\infty$ (неизолированная) существенно особенная точка. **2236.** $z=\pm 2\pi i$; $\pm 4\pi i \ldots$ простые полюсы. **2237.** $z=0$ существенно особенная точка. **2238.** $z=\pm 1$ точки разветвления первого порядка. **2239.** $z=1$; $e^{\pm\frac{2\pi i}{3}}$; ∞ точки разветвления первого порядка. **2240.** $z=0$, $z=\infty$ точки разветвления. **2241.** $z=\infty$ — существенно особенная точка. **2242.** $z=0$ точка разветвления; $z=\infty$ существенно особенная точка и точка разветвления. **2243.** Нет точек разветвления; $z=\infty$ существенно особенная точка. **2244.** $|w|=C$; $x^2+y^2=ax$; $\operatorname{Arg} w=C$; $x^2+y^2=ay$. **2246.** $\Delta\operatorname{Arg}\sqrt[n]{z-a}=\dfrac{2\pi}{n}$ при одном обходе. **2247.** $\Delta\operatorname{Arg} w$ равно соответственно π; 2π; 0. **2248.** В первом случае $w=e^{-e(1+\pi i)}$; во втором $w=e^{-e(1-\pi i)}$. **2249.** $\sqrt{2\sin\varphi}\cdot e^{\frac{3\pi i}{e^4}}$, если $\sin\varphi>0$ и $\sqrt{-2\sin\varphi}\,e^{\frac{\pi i}{e^4}}$, если $\sin\varphi<0$. **2250.** $\ln 8+\pi i$. **2251.** $\ln(1+\sqrt{2})+\dfrac{\pi i}{2}$; $-\ln(1+\sqrt{2})+\dfrac{\pi i}{2}$. **2257.** $w_1=1+\dfrac{z}{2}-\dfrac{z^2}{12}+\dfrac{z^3}{24}-\dfrac{19}{720}z^4-\dfrac{49}{480}z^5-\ldots$, $r=1$; $w_2=1+\dfrac{z^2}{3}-\dfrac{4z^4}{45}+\dfrac{44}{945}z^6-\dfrac{428}{14175}z^8+\ldots$, $r=1$. **2258.** $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\left[1-\dfrac{1}{2}iz+\dfrac{1}{2\cdot 4}z^2+\dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}iz^3-\dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}z^4+\ldots\right.$. **2259.** Обе функции разлагаются в ряд на всей плоскости. **2260.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$;

$$a_n=\sum_{k=0}^{E\frac{n}{2}}\frac{(-1)^k}{(n-2k)!\,(2k+1)!}.$$

2261. $$[(z-a)+a]e^a\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)(z-a)^n\right],$$

где $$a_n=\sum_{k=0}^{E\frac{n}{2}}\frac{(-1)^k\cos\alpha}{(n-2k)!\,2k!},\qquad b_n=\sum_{k=0}^{E\frac{n}{2}}\frac{(-1)^k\sin\alpha}{(n-2k-1)!\,(2k+1)!}.$$

2262. $$-\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n-1}}{2^{2n}}-\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^{2n-1}}.$$ **2263.** $$\frac{1}{9}\left[\sum_{-\infty}^{-1}z^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3n+7}{4^{n+2}}z^{2n}\right].$$

2264. $\frac{1}{9}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1+(3n-7)\,4^{n-2}}{z^{2n}}$. **2265.** При $|z|<\pi$, $\frac{1}{z}-2\sum_{n=1}^{\infty}a_n z^{2n-1}$;

$a_n=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(\pi k)^{2n}}$; при $\pi<|z|<2\pi$, $\frac{3}{z}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^{2n}}{z^{2n+1}}-2\sum_{n=1}^{\infty}a_n z^{2n-1}$;

$a_n=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(\pi k)^{2n}}$. **2266.** При $1<|z|<2$ $a\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\left(\frac{2}{z}\right)^n$; здесь:

$a=-\frac{1}{2}\ln\frac{2-i}{2+i}$; $b_n=a+c_n$; $c_{2\nu}=c_{2\nu+1}=-i\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3\cdot 2^3}+\ldots+\frac{(-1)^{\nu-1}}{(2\nu-1)\,2^{\nu-1}}\right]$.

2267. При $|z|>2$ $\sum_{n=2}^{\infty}c_n\left(\frac{2}{z}\right)^n$, c_n из задачи 2266. **2268.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{-n+5}}{n!}$.

2269. $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z^n+z^{-n})$; $a_0=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(\nu!)^2}$; $a_n=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!\,(n+\nu)!}$.

2270. $\pm\left[z-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2k-1)}{(k+1)!}\cdot\frac{1}{(2z)^k}\right]$. **2271.** Радиус сходимости двух первых рядов равен r; третий ряд нигде не сходится, если $r<\infty$, если же $r=\infty$ общего ответа дать нельзя; четвертый ряд сходится всюду. Сумма первого ряда $\left(z\frac{d}{dz}\right)^p\varphi(z)$; сумма второго ряда $\left(\frac{1}{z}\int_0^z dz\right)^p\varphi(z)$.

2277. $z=1$ точка разветвления (логарифмическая). **2280.** $-\ln\left|2\sin\frac{x}{2}\right|$, $0<x<2\pi$. **2281.** $\frac{\pi}{4}$. **2282.** $\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right|$. **2283.** $\frac{1}{2}+\frac{\cos x}{4}-\frac{\pi-x}{2}\sin x$.

2284. $\sin x\left[\frac{1}{4}-\ln\left|2\sin\frac{x}{2}\right|\right]$. **2285.** $\frac{x(\pi-x)}{2}$. **2286.** Если $\varphi+\theta\leqslant\pi$, то $S=\frac{1}{4}\pi\varphi$, когда $\varphi\leqslant\theta$ и $S=\frac{1}{4}\pi\theta$, когда $\varphi>\theta$. Если $\varphi+\theta>\pi$, то $S=\frac{\pi}{4}(\pi-\theta)$, когда $\varphi\leqslant\theta$ и $S=\frac{1}{4}\pi(\pi-\varphi)$, когда $\varphi>\theta$. **2287.** Если $0<\varphi+\theta<\pi$, $S=0$ при $\theta>\varphi$; $S=\frac{\pi}{8}$ при $\theta=\varphi$; $S=\frac{\pi}{4}$ при $\theta<\varphi$. Если $\pi<\varphi+\theta<2\pi$, $S=-\frac{\pi}{4}$ при $\theta>\varphi$; $S=-\frac{\pi}{8}$ при $\theta=\varphi$; $S=0$ при $\theta<\varphi$.

2288. При $z=0$ вычет 1, при $z=\pm 1$ вычет равен $-\frac{1}{2}$. **2289.** $\mp\frac{i}{4}$.

2290. $(-1)^{n+1}C_{2n}^{n-1}$; $(-1)^n C_{2n}^{n-1}$. **2291.** $e^{\alpha}-e^{\beta}$. **2292.** $-\frac{1}{2}$. **2293.** 0.

2294. $-\frac{\pi i}{\sqrt{2}}$. **2295.** $-\frac{\pi i}{2}$. **2296.** $\frac{3\pi i}{64}$. **2297.** 0. **2298.** 0. **2299.** 0.

2300. $n+\frac{1}{2}$. **2301.** $\frac{\pi i}{2}\sqrt{1+\sqrt{2}}$. **2302.** $b=2a$. **2303.** 0, если $0<r<\frac{1}{2}$; $-2i\ln\frac{2r+1+\sqrt{4r^2+4r-3}}{2}$, если $\frac{1}{2}<r<\frac{3}{2}$; $-2i\ln\frac{2r+1+\sqrt{4r^2+4r-3}}{2r-1+\sqrt{4r^2-4r-3}}$, если $\frac{3}{2}<r$. **2304.** $\pi\sqrt{2}$. **2305.** $\frac{4\pi}{3}$.

2306. $\frac{\pi}{2a}$. **2307.** $\frac{\pi(2a+b)}{2a^3b(a+b)^2}$. **2308.** $\frac{\pi}{n}\operatorname{cosec}\frac{2m+1}{2n}\pi$.

2309. 1) $2\pi-\frac{\pi}{\sqrt{2}}\frac{(1+2\lambda)\sqrt{1-\lambda}+(1-2\lambda)\sqrt{1+\lambda}}{(1-\lambda^2)^{\frac{3}{4}}}$; 2) 2π.

2310. $\frac{\pi}{2\sin\frac{\lambda}{2}}$. **2311.** $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$. **2312.** $\frac{2\pi a^2}{(a^4-b^4)^{\frac{3}{2}}}$. **2313.** $\pi\frac{1+p^4}{1-p^2}$.

2314. $\pi\frac{(1-p+p^2)}{1-p}$. **2315.** $\pi i\operatorname{sign}\operatorname{Im}a$. **2316.** $\frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{-\frac{b^2}{4a^2}}$. **2317.** $\frac{2\pi}{n!}$.

2318. $\frac{\pi}{2}(e^a-1)$. **2319.** $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$. **2320.** $I_1=2\pi ie^{-ar}$; $I_2=0$. **2321.** $\frac{\pi}{2}e^{-ar}$; $a>0$, $r>0$. **2322.** $\frac{\pi}{2r}e^{-ar}$; $a>0$, $r>0$. **2323.** $\frac{\pi}{4a}(1+e^{-2a})$.

2324. $\frac{\pi e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\sin\frac{1}{2}}{\sqrt{3}}$. **2325.** $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\left[e^{-\frac{a}{2}}\left(\sin\frac{a\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}\cos\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)+\sqrt{3}\right]$.

2326. $\frac{\pi}{2}$. **2327.** $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}e^{-\frac{a}{\sqrt{2}}}\left(\cos\frac{a}{\sqrt{2}}+\sin\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$. **2328.** $\frac{\pi}{2b^3}(1-e^{-ab})$.

2360. $\frac{\pi^2}{4}$. Интегрировать по прямоугольнику $\ln(1-e^{-z})$.

2376. 1. **2377.** 0. **2378.** 5. **2379.** 1. **2380.** По корню в квадранте.

2381. То же. **2429.** $z=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}1.3.5\ldots(2n-3)}{n!}\left(\frac{w}{2}\right)^n$; $|w|<1$.

2430. $z=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n-1}}{n!}w^n$; $|w|<e^{-1}$. **2431.** $z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n(2n+2)}w^{2n+1}$.

2432. $z=bw+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b^{nm+1}w^{(m+1)n+1}\frac{(mn+2)(mn+3)\ldots(nm+n)}{n!}$; здесь $|w^{m+1}b^m|<\frac{m^m}{(m+1)^{m+1}}$. **2433.** $e^z=1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\frac{w^n}{n!}$;

$a_n = \sum_{\nu=0}^{n-1} C_{2n}^{\nu} \frac{(n-1)!}{(n-1-\nu)!}$; $|w| < \frac{1}{4}$. **2434.** $e^{-z} = e^{-a} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(e^{-a}a^n)^{(n-1)}}{n!} w^n$. **2435.** $E = M + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n!} \frac{d^{n-1}(\sin^n M)}{dM^{n-1}}$. **2436.** $x = 1$; $x = -1$. **2437.** $x = 0$; $x^6 = 4$. **2438.** $x = \pm 1$; $x = \pm\sqrt{1+\sqrt{2}}$; $x = \pm\sqrt{1-\sqrt{2}}$. **2439.** $x = 1, \rho, \rho^2$; $x = \sqrt{1 \pm \sqrt{2}}$; $\rho\sqrt{1\pm\sqrt{2}}$; $\rho^2\sqrt{1\pm\sqrt{2}}$; $\rho = e^{\frac{2\pi i}{3}}$. **2440.** $y_1 = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{81}x^5 + \ldots$; $y_{2,3} = \sqrt{3}x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{6}x^2 - \frac{\sqrt{3}}{72}x^{\frac{7}{2}} - \ldots$ **2441.** $y_1 = -\frac{x}{4} + \frac{x^4}{1024}\ldots$; $y_{2,3,4} = \sqrt[3]{4} + \frac{x}{12} + \ldots$ **2442.** $y_{1,2,3} = (b^2x)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}a\left(\frac{x}{b}\right)^{\frac{8}{3}} + \ldots$; $y_{4,5} = a^{\frac{1}{2}}b^{-1}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}a^2b^{-6}x^5 + \ldots$ **2443.** $y_1 = x + \frac{4}{3}x^2 + \ldots$; $y_{2,3} = \sqrt{\frac{x}{2}} - 2\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)^3 + \ldots$; $y_{4,5} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}x - \frac{(\sqrt{3}-1)^4}{24}x^2 + \ldots$
2453. $|z| \neq 1$. **2454.** Вся плоскость, кроме точек $z = -1, -2, -3, \ldots$ **2455.** $|z| < 1$. **2456.** Всюду, кроме точек $z = \pm ia^{-n}$. **2477.** $ad - bc = 0$, $\operatorname{Im}\left(\frac{b}{d}\right) > 0$. **2478.** Окружности с центром в точке $-\frac{d}{c}$. **2479.** 1) $w = (\beta + \gamma i)e^{i\alpha z}$, 2) $w = (\beta + \gamma i)z^{\alpha}$, α, β, γ — вещественные. **2480.** $w = \frac{(1+i)(z-i)}{(1-3i)z+1+3i}$. **2481.** $w = \frac{2z+1}{z+2}$. В дальнейших задачах, имеющих множество решений, дано одно. **2482.** $w = \frac{a(b-z)}{(a-b)z+ab}$. **2483.** $w = c\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\alpha}$. **2484.** $w = \frac{2z}{1+z^2}$. **2485.** $w = -\frac{z^2+2z-1}{z^2-2z-1}$. **2486.** $w = \frac{2az}{z^2-a^2}$. **2487.** $w = \frac{2+iz^2}{2-iz^2}$. **2488.** $w = -\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^2$. **2489.** $w = \sqrt{\frac{z-a}{z-b}}$. **2490.** $w = \sqrt{\frac{z-a}{b-z}}$. **2491.** $w = \frac{2\sqrt{z}}{1+z}$. **2492.** $a \ln w = \pi z i$. **2493.** $w = \frac{\pi a i(2b-z)}{(b-a)z}$. **2494.** $w = \ln z$. **2495.** $w = \frac{z+24}{3z}$. **2496.** $w = \frac{b-z}{b+z}$; $\rho = \frac{a-b}{a+b}$. **2497.** $w = z + \sqrt{z^2-1}$; $A = 2 + \sqrt{5}$. **2498.** $w = \sqrt{z - \frac{p}{2}} - i\sqrt{\frac{p}{2}}$. **2499.** $w = Ai \operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2z}{p} - 1}\right) + B$; A и B вещественны. **2500.** $w = \left(e^{-\alpha i}\frac{z+\sqrt{z^2-4}}{2}\right)^{\frac{\pi}{\pi-2\alpha}}$. **2501.** $w = \frac{2}{a^2}\left(z^2 - \frac{a^2}{2}\right)$. **2506.** В многоугольную звезду с равными сторонами. Внутренние углы поочередно равны $\pi - \frac{2\pi}{n} - \lambda\pi$

и $\pi+\lambda\pi$. **2507.** Ширина полосы $\frac{\pi}{2}$; $z=0$, $w=0$; $z=\infty$, $w=\frac{\pi}{2}(-1+i)$; $z=1$, $w=+\infty$; $z=-1$, $w=-\infty i$. **2508.** $w=\int\limits_0^z \frac{(1+z^5)^{\frac{2}{5}}}{(1-z^5)^{\frac{4}{5}}}dz$.

2509. $w=c\int\limits_1^z \frac{(1-z^n)^{\frac{2}{n}}}{z^2}dz$. **2510.** $w=\sqrt{z^2-1}$. **2511.** $w=i\ln\sin z$.

2512. $w=\frac{11z^2+18z+11-6(1+z)\sqrt{2(1+z^2)}}{7z^2+18z+7}$. **2513.** $z=\frac{4w}{(w+1)^2}$.

2514. $w=A\int\limits_0^z \frac{\sqrt{z}}{(z-a)(z+1)}dz$, $a=\frac{h^2}{H^2}$, $A=\frac{h^2+H^2}{\pi H}$. **2515.** $w=\frac{1}{\pi}\times$ $\times\left[\ln\frac{\cos\alpha+\sqrt{\zeta^2-\sin^2\alpha}}{\cos\alpha-\sqrt{\zeta^2-\sin^2\alpha}}-2\alpha i\right]$; $\zeta=\operatorname{th}\frac{\pi z}{2}$; $\alpha=\frac{\pi h}{2}$. **2516.** $w=$ $=\ln(2\zeta+1+2\sqrt{\zeta^2+\zeta})-\sqrt{\frac{a}{a+1}}\ln\frac{(2a+1)\zeta+a+2\sqrt{(\zeta^2+\zeta)(a^2+a)}}{a-\zeta}$, где $\zeta=\frac{\pi z}{H}$; $\pi\sqrt{\frac{a}{a+1}}=h$. **2546.** $y=[a+(b-a)x]e^x+\int\limits_0^x(x-t)e^{x-t}\times$ $\times f(t)\,dt$. **2547.** $6x=(a+2b+c)e^{-t}+3(a-c)e^t+2(a-b+c)e^{2t}$; $6y=$ $=2(a+2b+c)e^{-t}-2(a-b+c)e^{2t}$; $6z=(a+2b+c)e^{-t}-3(a-c)e^t+$ $+2(a-b+c)e^{2t}$. **2548.** $9x=4e^t-9e^{-t}+(14+24t)e^{-2t}$; $9y=e^t+$ $+(24t-10)e^{-2t}$. **2549.** $x=e^{2t}-2e^t$; $y=(1-t)e^t$; $z=(2+t)e^t-e^{2t}$. **2550.** $2x=(3t-1)e^t+(t+3)e^{-t}$; $4y=2(4-3t)e^t-(t+4)e^{-t}$. **2551.** $y=a_0\left[1+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}+\frac{x^9}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 8\cdot 9}+\dots\right]+$ $+a_1\left[x+\frac{x^4}{3\cdot 4}+\frac{x^7}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7}+\frac{x^{10}}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 9\cdot 10}+\dots\right]$. **2552.** $y=a_0\times$ $\times\left[1+\frac{x^4}{3\cdot 4}+\frac{x^8}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8}+\frac{x^{12}}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8\cdot 11\cdot 12}+\dots\right]+a_1\left[x+\frac{x^5}{4\cdot 5}+\right.$ $\left.+\frac{x^9}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9}+\frac{x^{13}}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\cdot 12\cdot 13}+\dots\right]$. **2553.** $y=$ $=a_0\left[1-\frac{x^4}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{x^8}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 8}-\frac{x^{12}}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 10\cdot 11\cdot 12}+\dots\right]+$ $+a_1\left[x-\frac{x^5}{3\cdot 4\cdot 5}+\frac{x^9}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 7\cdot 8\cdot 9}-\frac{x^{13}}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 11\cdot 12\cdot 13}+\dots\right]+$ $+a_2\left[x^2-\frac{x^6}{4\cdot 5\cdot 6}+\frac{x^{10}}{4\cdot 5\cdot 6\cdot 8\cdot 9\cdot 10}-\frac{x^{14}}{4\cdot 5\cdot 6\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 12\cdot 13\cdot 14}+\dots\right]$. **2554.** $y=$ $=a_0\left[1-\frac{x^6}{4\cdot 5\cdot 6}+\frac{x^{12}}{4\cdot 5\cdot 6\cdot 10\cdot 11\cdot 12}-\frac{x^{18}}{4\cdot 5\cdot 6\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 16\cdot 17\cdot 18}+\dots\right]+$ $+a_1\left[x-\frac{x^7}{5\cdot 6\cdot 7}+\frac{x^{13}}{5\cdot 6\cdot 7\cdot 11\cdot 12\cdot 13}-\frac{x^{19}}{5\cdot 6\cdot 7\cdot 11\cdot 12\cdot 13\cdot 17\cdot 18\cdot 19}\dots\right]+$

$$+a_2\left[x^2-\frac{x^8}{6\cdot7\cdot8}+\frac{x^{14}}{6\cdot7\cdot8\cdot12\cdot13\cdot14}-\frac{x^{20}}{6\cdot7\cdot8\cdot12\cdot13\cdot14\cdot18\cdot19\cdot20}\cdots\right].$$

2555. $y=\dfrac{a_0+a_1x}{1-x^2}$. **2556.** $y=a_0\varphi(x)+c\Big[\varphi(x)\ln x+$ $+\left(2x-\frac{3}{4}x^2+\frac{11}{108}x^3-\frac{50}{3456}x^4+\ldots\right)\Big]$, где $\varphi(x)=1-\dfrac{x}{(1!)^2}+\dfrac{x^2}{(2!)^2}-$ $-\dfrac{x^3}{(3!)^2}+\ldots\dfrac{(-1)^nx^n}{(n!)^2}+\ldots$ **2557.** $xy=a_0\cos x+a_1\sin x$.

2561. $y=a_0\left[1-\dfrac{n(n+1)}{1\cdot2}x^2+\dfrac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!}x^4-\right.$ $\left.-\dfrac{n(n-2)(n-4)(n+1)(n+3)(n+6)}{6!}x^6+\ldots\right]+a_1\left[x-\dfrac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3+\right.$ $\left.+\dfrac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!}x^5-\ldots\right]$. **2562.** $y=$ $=a_0\left[x^n-\dfrac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n+2}+\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot4\cdot(2n-1)(2n-3)}x^{n+4}-\ldots\right]+a_1\left[x^{-(n+1)}+\right.$ $\left.+\dfrac{(n+1)(n+2)}{2\cdot(2n+3)}x^{-(n+3)}+\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2\cdot4\cdot(2n+3)(2n+5)}x^{-(n+5)}+\ldots\right]$.

2563. $\varphi(a,x)=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)\ (2a+1)(2a+3)\ldots(2a+2n-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots2n\,(2a+2)(2a+4)\ldots(2a+2n)}x^n$.

2564. $y=c_1\varphi(0,1-x)+c_2\left[\varphi(0,1-x)\ln(1-x)+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1\cdot3\cdot5\ldots2n-1}{2\cdot4\ldots2n}\right)^2\times\right.$ $\left.\times\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ldots-\frac{1}{2n}\right)(1-x)^n\right]$; $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}\left[A\varphi\left(0;\ \frac{1}{x}\right)+B\varphi\left(0;\ \frac{1}{x}\right)\ln\frac{1}{x}+\right.$ $\left.+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1\cdot3\ldots2n-1}{2\cdot4\ldots2n}\right)^2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ldots-\frac{1}{2n}\right)\frac{1}{x^n}\right]$. **2565.** $y=C_1J_n(x)+$ $+C_2J_{-n}(x)$; $J_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{k!\,\Gamma(n+k+1)}$.

2567. $y=\int\limits_{(\gamma)}e^{tx}(t^2+1)^{n-\frac{1}{2}}\,dt$. За контур можно взять кривые, идущие из ∞ в направлении $\operatorname{Re}xt<0$ и уходящие в том же направлении после обхода точек i и $-i$. Можно также выбрать контур, обходящий точки i и $-i$ в противоположных направлениях так, чтобы изменение функции под интегралом при обходе контура равнялось нулю.

2568. $y=C_1y_1+C_1y_2$. Каждая из функций y_1 и y_2 представляется интегралом $\int\limits_{(\gamma)}e^{xt}(t-\alpha)^{\frac{-\alpha(\alpha+\beta)}{\alpha-\beta}-1}(t-\beta)^{\frac{-\beta(\alpha+\beta)}{\beta-\alpha}-1}\,dt$. Контур (γ) выбирается так, чтобы точки α и β лежали внутри его, а приращение подынтегральной функции вдоль него равнялось нулю. Если $\alpha<0$; $0<\beta<-\alpha$, то за один контур можно взять отрезок от α до β, а за другой — отрезок от одной из точек α или β и уходящий в бесконечность в направлении $\operatorname{Re} xt<0$.

2569. При $\operatorname{Re} x>0$ имеем: $y=C_1\int_{-q}^{q}(t^2-q^2)^{a-1}e^{tx}\,dt+C_2\int_{-\infty}^{-q}(t^2-q^2)^{a-1}e^{xt}\,dt$ при $\operatorname{Re} x<0$ пределы второго интеграла меняют знак.

2570. Один частный интеграл, получается из предыдущего интеграла заменой $t=q\cos\varphi$ при контуре (γ) в виде отрезка $(-q;\ +q)$. Другой получается после замены $y=x^{1-2a}\eta$ из подобного же решения для η.

2590. Линии потенциала — вертикали, линии тока — горизонтали, скорость равна a и направлена в положительную сторону оси Ox.

2591. Линии тока и потенциала — вертикали и горизонтали, скорость равна a и направлена в отрицательную сторону оси Oy.

2592. Линии тока $xy=C$, линии потенциала $x^2-y^2=C$; скорость по величине $2|z|$, $v_x=2x$, $v_y=-2y$.

2593. Линии тока $x^2+y^2=Cy$, линии потенциала $x^2+y^2=Cx$; $v_x=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$; $v_y=-\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$; $v=\dfrac{1}{x^2+y^2}$.

2594. Линии тока и потенциала лемнискаты: $r^2=C\sin 2\varphi$, $r^2=C\cos 2\varphi$; $v=\dfrac{2}{|z|^3}$.

2595. Линии тока и потенциала: $y=Cx$, $x^2+y^2=C^2$; $v_x=\dfrac{x}{x^2+y^2}$, $v_y=\dfrac{y}{x^2+y^2}$; $v=\dfrac{1}{|z|}$.

2596. $\arg(z-a)+\arg(z+a)-\arg(z-ai)-\arg(z+ai)=C$. **2597.** $w=2i\ln(z^2-a^2)+C$, $\varphi=-2\operatorname{arctg}\dfrac{r^2\sin 2\theta}{r^2\cos 2\theta-a^2}$. **2598.** $w=\ln\operatorname{sh}\dfrac{\pi z}{a}+C$.

2599. $\dfrac{1}{2}$. **2600.** $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. **2601.** Линии тока и потенциала: $A(x-a)+By=0$; $(x-a)^2+y^2=C^2$. **2604.** Поток по любому замкнутому контуру равен нулю. Циркуляция по замкнутому контуру равна нулю, если точка a вне контура, и равна Γ, если точка a внутри контура. **2606.** Поток равен 6π, циркуляция равна нулю. **2607.** Обе циркуляции равны -4π. **2608.** Источники в точках: $e^{\frac{\pi i}{4}}$, $e^{\frac{3\pi i}{4}}$, $e^{\frac{5\pi i}{4}}$, $e^{\frac{7\pi i}{4}}$, 0. Их мощности равны: 2π, 2π, 2π, 2π, -4π; **2613.** $w=\dfrac{Q}{2\pi}\ln(z+z^{-1}-a-a^{-1})$; $|z|=1$ — одна из линий тока

2614. $w=\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\frac{(z-a)}{\left(z-\frac{1}{a}\right)}$; $|z|=1$ — одна из линий тока. **2615.** $w=$ $=\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\frac{(z-ai)\left(z+\frac{i}{a}\right)}{(z+ai)\left(z-\frac{i}{a}\right)}$. **2616.** $w=\frac{Q}{\pi}\ln(z^2-1)$. **2617.** $w=\frac{Q}{2\pi}\ln(z^6+a^6)$.

2618. $w=\frac{Q}{\pi}\ln\frac{z^2-1}{z^2+1}$. **2619.** $w=-\frac{Q}{\pi}\cdot\frac{1}{z}$. **2630.** $w=-v\left(z+\frac{1}{z}\right)$.

2635. $w=\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\frac{\Gamma\left(-\frac{z}{l}-\frac{1}{4}-\frac{hi}{2l}\right)}{\Gamma\left(-\frac{r}{l}+\frac{1}{4}+\frac{hi}{2l}\right)}$. **2636.** $v=\frac{\Gamma}{4d}\operatorname{ctg}\frac{\pi h}{d}$, параллельно стенкам. **2637.** $w(z)=\frac{Q}{2\pi}\ln\sin z$. **2638.** $w(z)=\frac{Q}{4\pi}\ln\sin(z-hi)$.

2639. $w(z)=-v\left(z+\frac{a^2}{z}\right)$. **2640.** $w(z)=-v\sqrt{z^2+1}$. **2641.** Скорость равна нулю в точках: $z_1=Re^{\beta i}$, $z_2=-Re^{-\beta i}$, где $\sin\beta=\frac{\Gamma}{4\pi aR}$ (при $\Gamma<4\pi aR$). Циркуляция по кругу $|z|=R$ равна Γ; $v_\infty=a$. **2642.** $w(z)=$ $=C\operatorname{arsh}z$. **2643.** $w(z)=\frac{v}{a-b}(az-b\sqrt{z^2-c^2})$, $c^2=a^2-b^2$.

2645. $w(z)=-v\left[z+\frac{4}{3}+\frac{4}{3(3z+4)}\right]$. **2647.** Силовые и потенциальные линии — прямые и окружности $\varphi=C$; $r=C$, где $z=re^{\varphi i}$. **2648.** Потенциал $v=\frac{1}{\ln(2+\sqrt{3})}\ln\left|\frac{z+7+4\sqrt{3}}{z+7-4\sqrt{3}}\right|-1$. **2649.** $v=4\pi\sigma\ln\left|\frac{z+i\sqrt{3}}{z-i\sqrt{3}}\right|$ плотность σ_1 в точке $z=2i+e^{\varphi i}$ выражается формулой: $\sigma_1=\frac{\sigma\sqrt{3}}{2+\sin\varphi}$.

2650. $\frac{1}{96\pi\ln 2}\leqslant|\sigma|\leqslant\frac{3}{32\pi\ln 2}$. **2651.** $v_1=2\delta\ln 3$. **2653.** $2z=(a+b)e^{iw}+$ $+(a-b)e^{-iw}$. Софокусные линии $\lambda x^2+(C^2+\lambda)y^2=\lambda(C^2+\lambda)$ — линии потенциала при $\lambda>0$, силовые линии при $0>\lambda>-C^2$. **2654.** $w=\frac{v_0}{h}z$.

2655. $v=\frac{\ln(\sqrt{2}+1)}{\ln(\sqrt{3}+2)}$. **2656.** $\sigma_{\max}=\frac{1}{4\pi\sqrt{3}\ln(2+\sqrt{3})}$; $\sigma_{\min}=\frac{1}{8\pi\ln(2+\sqrt{3})}$. **2657.** $w=+v_0 i-\frac{2v_0}{\pi}\ln(z+\sqrt{z^2-1})$.

2658. $\sigma=\frac{1}{2\pi^2\sqrt{x^2+1}}$. **2659.** $z=2\sqrt{e^w+1}-2\ln(\sqrt{e^w+1}+1)+w$.

2660. $w=-2iq\ln(z+\sqrt{z^2-(a^2-b^2)})+Ci$; C — вещественно.

2661. $q(z-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos\tau}\,d\tau = i\int\limits_0^{w}\sqrt{\cos\frac{w}{q}}\,dw$. **2662.** $t=\frac{100^\circ}{\ln 2}\ln\left|\frac{4z+1}{z+4}\right|$.

2663. $t=\frac{100^\circ}{\ln 4}\ln\frac{17}{5}$. **2664.** $t=\frac{2}{\pi}\operatorname{Arg}\frac{z+a}{z-a}$. **2665.** $t=\frac{2}{\pi}\operatorname{Arg}\frac{1+z}{1-z}$.

2666. $t=\frac{2}{\pi}\operatorname{Arg}\frac{a^{\frac{\pi}{\alpha}}+z^{\frac{\pi}{\alpha}}}{a^{\frac{\pi}{\alpha}}-z^{\frac{\pi}{\alpha}}}$.

Гюнтер Николай Максимович и *Кузьмин Родион Осиевич*

Сборник задач по высшей математике

Том II

Редактор *Г. П. Акилов*
Техн. редактор *К. М. Волчок*
Корректор *Т. С. Петрова*

Сдано в набор 9/XII 1957 г. Подписано к печати 4/II 1958 г. Бумага 60×92/16. Физ. печ. л. 18,00. Условн. печ. л. 18,00. Уч.-изд. л. 18,87. Тираж 25 000 экз. Т-02254. Цена 6 р. 95 к. Заказ № 2609.,

Государственное издательство физико-математической литературы. Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Типография № 2 им. Евг. Соколовой УПП Ленсовнархоза.
Ленинград, Измайловский пр., 29.

ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка	№	Напечатано	Должно быть
179	4 сверху	2156	$1-\frac{\lvert x\rvert}{a}$	$1-\frac{\lvert x-x_0\rvert}{a}$
180	13 »	2163	$(a+it)\,e^{-it}$	$a\,(1+it)\,e^{-it}$
254	4 »	953	$(4H^2+\sqrt{3}R^2)$	$(4H^2+3R^2)$
256	11 снизу	1127	$\mathrm{tg}\left(t\,\frac{\sqrt{gk}}{m}\right.$	$\mathrm{th}\left(t\,\frac{\sqrt{gk}}{m}\right)$
256	11 »	1128	$Ce\,\frac{\rho_0\omega^2}{2p_0}\,r^2$	$Ce^{\frac{\rho_0\omega^2}{2p_0}r^2}$
266	9 сверху	1595	$-xe^{x}]$	$-xe^{x^2}]$
268	1 »	1657	$-\alpha_1C_1e^{-\alpha_1}$	$-\alpha_1C_1x^{-\alpha_1}$
273	4 снизу	2049	$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+b^2}};\quad b>0$
275	2 сверху	2095	$\frac{4}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\ldots$	$\frac{4}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\ldots$
275	6 снизу	2146	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\,2n!}{\cdots\cdots}$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\,2n!}{\cdots\cdots}$
278	9 »	2249	$e^{\frac{3\pi i}{e^4}}$	$e^{\frac{3\pi i}{4}}$
278	8 »	2249	$e^{\frac{\pi i}{e^4}}$	$e^{\frac{\pi i}{4}}$
279	4 сверху	2266	$\frac{(-1)^{\nu-1}}{(2\nu-1)\,2^{\nu-1}}$	$\frac{(-1)^{\nu-1}}{(2\nu-1)\,2^{2\nu-1}}$
283	8 »	2562	$a_0\,[x^n-\ldots\,x^{n+2}+\ldots\,\ldots+\ldots\,x^{n+4}-\ldots]$	$a_0\,[x^n-\ldots\,x^{n-2}+\ldots\,\ldots\,x^{n-4}-\ldots]$

Зак. 2609.